常微分方程式の数値解法

伊藤幹夫

平成 14 年 5 月 16 日

1　はじめに

常微分方程式は、経済成長理論や経済変動論のようなマクロ動学、ジョブ・サーチの理論をはじめ動学的最適制御の応用を含むものなど、多くの経済理論に登場する。その中には定数係数の線形常微分方程式のように解析的な解法がわかっているもの、単純な求積法で解が求まるもの、また解が具体的に解けなくても極限閉軌道の存在を解析的に確かめられるものもある。

しかし、一般に非線形の常微分方程式は解析的に解けない。そこで数値的に解くことが重要になる。経済学において常微分方程式の数値解法が前面において使われることは少ないが、理論を展開する思考実験の段階で今後ますます重要性が高まると思われる。

幸い常微分方程式の数値解法の理論は十分に成熟しており、いくつかの典型的な解法がコンピュータ・パッケージになってシステム・シミュレーションのためのソフトとして販売されている。

このノートでは、常微分方程式の数値解法の基礎を解説する。そこに登場する、Euler 法の基礎にある直接的有限差分近似、間接的 Euler 法の基礎にある完全間接的有限差分近似などの考え方は、この講義でも扱う偏微分方程式の数値解法においても現れるため正確に理解しておくことが望まれる。ただし、応用的には 4 次の Runge-Kutta 法が常微分方程式の数値解法テクニックとして最も汎用性が高いため、それの解説がクライマックスになるように講義ノートを構成することにする。

2　常微分方程式

ある関数の独立変数ならびにその導関数から構成され、関数自体を未知とする方程式を**微分方程式**とよぶ。また、方程式を満足させる関数を単に解と呼ぶ。微分方程式に現れる未知の関数が 1 変数の関数であるとき**常微分方程式**という[1]。経済学で多くの登場する常微分方程式では、時間 t と解釈される変数を独立変数とするため、解はある経済変数の時間経路を表現する。

t を独立変数，$x_1, \cdots, x_n$ を t の未知関数とするとき、微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \cdots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \cdots, x_n) \end{cases} \tag{1}$$

[1]未知関数ならびにその (偏) 導関数が 2 個以上の変数に依存する場合、**偏微分方程式**という。偏微分方程式は別の機会に扱う。

を n 元の**正規形**，あるいは**標準形**の微分方程式という。ただし $n \geq 1$ とする。ほとんどの常微分方程式をこの形に帰着させることができる。

演習 1 例えば $x(t)$ を未知関数とする n 階常微分方程式,

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

正規形の方程式に帰着させよ。*(ヒント: 変数を増やす。)*

n 元の正規形微分方程式を満たす解経路を 1 本探すには、通常 n 個の値を指定しなくてはならない。n 次 Euclid 空間上の点を 1 点決めてそこを $x_1, \cdots, x_n$ がある時点 t_0 に通過すると考えて、解経路を探す問題を**初期値問題**という。

これに対して、例えば $x_1(t_0) = x_{10}, \cdots, x_{n'}(t_0) = x_{n'0}$, $x_{n'+1}(t_1) = x_{n'+1,1}, \cdots, x_n(t_1) = x_{n1}$ のように n 個の値を指定する問題を**境界値問題**という。境界値問題はさまざまなバリエーションが存在する。

演習 2 上の例を n 次空間の点の指定の問題とみなすとき、どのように解経路に条件を加えていると考えられるか。

演習 3 正規形微分方程式の境界条件のさまざまなバリエーションを考え、その解釈を上の演習を踏まえて示せ。

初期値問題が簡単なので、このノートではまずそちらを扱う。

3　常微分方程式の離散化

コンピュータで微分方程式を数値的に扱うためには、離散化を避けて通ることができない。これはコンピュータがデジタル信号を処理する機械であるために仕方がない。必然的に数値解法で求められた解は近似解という特徴をもつ。

常微分方程式に対して離散化を施すと、方程式は差分方程式に変換される。その差分方程式を初期値と組み合わせて求めた解が、もともとの常微分方程式の解に近いことが望まれる。しかし、差分方程式を解いてみるとわかるが、常に精度のよい近似解を保証するとは限らない。離散化とそれから導かれた差分方程式は 1 対 1 に対応しているから、離散化によって近似のパフォーマンスが異なると考えるの自然である。そこで以下では、いくつかの離散化を示して、そこから得られる数値解法を紹介する。

4　直接的 Euler 法

1 変数関数であろうと多変数関数であろうと微分の定義に戻れば、微分可能な関数 $g(t)$ について

$$g(t+h) = g(t) + hg'(t) + O(h^2)$$

が成立する。g を n 次ベクトル値関数とみなせば、n 元正規常微分方程式に使えそうである。

4.1 $n = 1$ の場合

簡単化のためにまず $n = 1$ として話を進める。微分方程式を解く範囲を $t \in [0, T]$ とし、それを m 区間に分割することにする。$h = \frac{T}{m}$ とおく。さらに $t_i = ih$ とすると $t_0 = 0, t_m = T$ であり $t_i = t_{i-1} + h$ が成立する[2]。

さて $x(t_i)$ を x_i と略記することにして、$\{x_i\}$ に関する差分方程式をすぐ上の微分の定義から導くのが直接的 Euler 法である。(添字を x の種類と勘違いしないこと。) $x(t)$ を正規常微分方程式の解とすると、

$$x_{i+1} = x_i + hx'(t_i) + O(h^2)$$

であるから、

$$x'(t_i) = \frac{dx_i}{dt} = f(x_i)$$

を考え、$O(h^2)$ を無視すると差分方程式

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i) \tag{2}$$

が得られる。これを**直接的 Euler 法**による有限差分化という。

直接的 Euler 法は近似パフォーマンスがよくないことが知られている。以下の演習によって確かめよ。

演習 4 定数係数微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9}{8}x + 1, \qquad x(0) = 1$$

の解析解をまず求めよ。*(*微分方程式の教科書とテキトーに参照。*)* つぎに、$t \in [0, 2]$ の範囲で、時間の刻み幅 1/100 で解析解から求めた x の数表を求めよ。

つぎに *(2)* にもとづいて、同じ刻み幅になるように h を定め近似解の数表を求め、*2* つの数表の比較から近似の度合いを調べよ。

また、刻み幅を小さくした場合、近似の精度が上がるかどうか確かめよ。解く期間の長さを変えてみて、解く期間の長さとの相対的関係も考慮せよ。

演習 5 すぐ上の演習の解は発散解であった。定数係数微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{7}{8}x - \frac{1}{2}, \qquad x(0) = 2$$

の解析解をまず求めよ。*(*微分方程式の教科書とテキトーに参照。*)* 今度は収束解である。前と同様に、$t \in [0, 2]$ の範囲で、時間の刻み幅 1/100 で解析解から求めた x の数表を求めよ。

つぎに *(2)* にもとづいて、同じ刻み幅になるように h を定め近似解の数表を求め、*2* つの数表の比較から近似の度合いを調べよ。

また、刻み幅を小さくした場合、近似の精度が上がるかどうか確かめよ。

演習 6 定数係数常微分方程式の場合、近似パフォーマンスと微分方程式・パラメータと刻み幅の間に何らかの法則があるかどうか考えよ。

[2]解く範囲は、区間 $[0, T]$ でなく、より一般的に区間 $[a, b]$ であってよい。

演習 7 非線形常微分方程式として有名な *logistic* 方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2, \qquad x(0) = c$$

とりあげてみる[3]。ただし a, b, c を正の定数とする。解析解をまず求めよ。*(*微分方程式の教科書とテキトーに参照。*)* a, b, c の値を適当に変えてみて、解経路がどんな挙動を示すか調べよ。（グラフを描け。）

解経路が *logistic* 曲線の特徴が $t \in [-1, 1]$ の範囲で表されるように各パラメータを設定し、定数係数の常微分方程式でやったのと同様に、*Euler* 法のパフォーマンスを詳細に調べよ。

演習 8 常微分方程式の数値解法の専門書を調べて、直接的 *Euler* 法の近似の理論をまとめよ[4]。

4.2 $n > 1$ の場合

$n > 1$ の場合は、連立常微分方程式に対応する。結果を述べれば (2) をベクトルとして読みかえればよいだけである。つまり

$$\begin{cases} x_{1,i+1} = x_{1,i} + hf_1(x_{1,i}, \cdots, x_{n,i}) \\ x_{2,i+1} = x_{2,i} + hf_2(x_{1,i}, \cdots, x_{n,i}) \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_{n,i+1} = x_{3,i} + hf_n(x_{1,i}, \cdots, x_{n,i}) \end{cases} \tag{3}$$

という、n 元連立差分方程式が得られる。なお、初期条件は $x_{1,0}, \cdots, x_{n,0}$ を決める n 個の数字が与えられればよい。

演習 9 必ず周期解をもつことが知られている非線形常微分方程式として有名な *Lotka-Volterra* 方程式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_1 x_2 \end{cases}, \qquad x_1(0) = x_2(0) = 1/2$$

とりあげてみる[5]。

Euler 法で近似解を求め、周期解をきちんと示すかを調べよ。*(h* をいろいろ変えてやってみること。）

5 間接的 Euler 法

直接的 Euler 法は t_{i+1} 時点の値を計算するために、x_i の周りで Taylor 展開した結果を使っている。そのことが、近似の精度を落としている。そこで、t_{i+1} 時点の値を計算するために、x_{i+1} の周りで Taylor 展開した結果を使うということを考える。つまり

$$x(t) = x(t+h) - hx'(t+h) + O(h^2)$$

これにより $n = 1$ の場合

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_{i+1}) \tag{4}$$

[3]新規商品の普及モデルや人口動向のモデルとされる微分方程式である。
[4]直接的あるいは陽的という explicit に対応する訳語をつけずに単に Euler 法とよぶ本も多いので注意。
[5]鹿と虎の生息数の関係のような捕食循環を示すため、生態学の分野で頻繁に使われる。

を得る。また $n > 1$ の場合

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,i+1} = x_{1,i} + hf_1(x_{1,i+1}, \cdots, x_{n,i+1}) \\ x_{2,i+1} = x_{2,i} + hf_2(x_{1,i+1}, \cdots, x_{n,i+1}) \\ \qquad\qquad\vdots \\ x_{n,i+1} = x_{3,i} + hf_n(x_{1,i+1}, \cdots, x_{n,i+1}) \end{array} \right. \tag{5}$$

を得る。

演習 10 上のことを示せ。

こうした有限差分化が間接的 Euler 法とよばれるのは、(4) にしろ (5) にしろ、$i+1$ 時点を値を計算するのに $i+1$ 時点の値が必要なためである。つまり、直接的 Euler 法が次の時点の値を計算する方法がすでに解かれたものであるのに対して、(4) と (5) は方程式の解として次の時点の値を求めるために単に前の時点の値を代入する以上の計算が必要になるのである。

5.1 不動点写像の方法

x_i から x_{i+1} を計算するには、$x_0^j = x_0$, $x_{i+1}^0 = x_i$ とおいて次の不動点写像の逐次代入を行う。

$$x_{i+1}^{j+1} = x_i^j + hf(x_{i+1}^j) \tag{6}$$

この逐次代入操作において、直前時点の反復操作の中間結果が右辺第 1 項で使われることに注意せよ。プログラミングをするときにこの注意が必要である。

$n > 1$ として多次元の場合の間接的 Euler 法に対する不動点写像の逐次代入を (6) をベクトルに読みかえて行えばよい。

演習 11 上のことをきちんと書き下してみよ。

5.2 Newton 法

不動点写像の逐次代入は、縮小写像であることを前提としているため、無条件で使えるわけではない。$|h\partial f/\partial x| < 1$ という条件がなければ、反復操作の結果が正しい値に収束するとは限らない。次に示す Newton 法も反復操作の結果が無条件で正しい値に収束するとは限らないが、不動点写像の方法よりずって弱い条件で反復が収束する。

(4) を解く別の方法としての Newton 法は、次の反復操作による。

$$x_{i+1}^{j+1} = x_{i+1}^j - \frac{x_{i+1}^j - x_i^j - hf(x_{i+1}^j)}{1 - h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1}^j)} \tag{7}$$

この逐次代入操作においても、直前時点の反復操作の中間結果が右辺第 1 項で使われることに注意せよ。プログラミングをするときにこの特に注意が必要である。

Newton 法も多次元に対応することができる。

演習 12 *Newton* 法も多次元に対応することができる。数値解析の本を調べて、*(7)* を $n > 1$ の場合に描き直してみよ。

5.3 直接的 vs 間接的

間接的 Euler 法の方が、近似パフォーマンスがよいことが知られている。以下の演習を通じてそのことを研究せよ。

演習 13 演習 *4* と演習 *5* で扱った方程式をそれぞれ、間接的 *Euler* 法で解き直してみて、直接的 *Euler* 法との近似パフォーマンスを比較せよ。

演習 14 演習 *7* 扱った方程式をそれぞれ、間接的 *Euler* 法で解き直してみて、直接的 *Euler* 法との近似パフォーマンスを比較せよ。

6 Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法は常微分方程式を非常に巧妙に離散化する。そのために、間接的 Euler 法と違って各ステップの値を計算するために反復計算する必要もなく、単純に各ステップ間の計算は逐次代入の関係になる。

6.1 1 次 Runge-Kutta 法

1 次の Runge-Kutta 法は、$n = 1$ のとき次のような差分方程式を構成する。

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_i + hf(x_i))\right) \tag{8}$$

演習 15 演習 *4* と演習 *5* で扱った方程式をそれぞれ、*1* 次 *Runge-Kutta* 法で解き直してみて、直接的 *Euler* 法、間接的 *Euler* 方程式との近似パフォーマンスを比較せよ。

演習 16 演習 *7* 扱った方程式をそれぞれ、*1* 次 *Runge-Kutta* 法で解き直してみて、直接的 *Euler* 法、間接的 *Euler* 方程式との近似パフォーマンスを比較せよ。

演習 17 *1* 次 *Runge-Kutta* 法は、$n > 1$ の場合にも拡張することができる。どのような差分方程式が構成されるか。書き下してみよ。

演習 18 演習 *9* を *1* 次 *Runge-Kutta* 法のベクトル版を使って解いてみよ。周期解が得られるか。

6.2 4 次 Runge-Kutta 法

4 次の Runge-Kutta 法は、1 次 Runge-Kutta 法を改良したものである。この方法をさらに改良した方法も数多くあるが、実際上現れる常微分方程式の数値解析でこの方法以外が必要となる場面に出くわすことは、あまりないと思われる。カオス理論でよく使われる Lorentz の strange attractor とよばれる複雑な挙動をする 3 元の連立常微分方程式体系に対しても正確にトレースする。

次のような差分方程式を構成する。

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}\left(z_1 + 2z_2 + 2z_3 + z_4\right) \tag{9}$$

ここで z_1, z_2, z_3, z_4 は各逐次代入のステップで計算する場合の一時的な変数で以下のように定義される。

$$
\begin{aligned}
z_1 &= f(x_i) \\
z_2 &= f(x_i + \frac{h}{2} z_1) \\
z_3 &= f(x_i + \frac{h}{2} z_2) \\
z_4 &= f(x_i + h z_3)
\end{aligned}
$$

演習 19 演習 *4* と演習 *5* で扱った方程式をそれぞれ、*4* 次 *Runge-Kutta* 法で解き直してみて、直接的 *Euler* 法、間接的 *Euler* 方程式との近似パフォーマンスを比較せよ。

演習 20 演習 *7* 扱った方程式をそれぞれ、*4* 次 *Runge-Kutta* 法で解き直してみて、直接的 *Euler* 法、間接的 *Euler* 方程式との近似パフォーマンスを比較せよ。

演習 21 *4* 次 *Runge-Kutta* 法は、$n > 1$ の場合にも拡張することができる。どのような差分方程式が構成されるか。書き下してみよ。

演習 22 カオス理論に登場する *Lorentz* 方程式を自ら調べ、*4* 次 *Runge-Kutta* 法で解いてみよ。

演習 23 経済成長理論その他、経済学に現れる常微分方程式を適当に特定化して *4* 次 *Runge-Kutta* 法で解いてみよ。さらに微分方程式の本にある有名な微分方程式の中で、できるだけ解析的に解けないものを選べ。特に極限閉軌道のあるもの。

7 境界値問題

これまで初期値問題を扱ってきたが、経済学にも常微分方程式の境界値問題が頻繁に登場する。実際、最適成長論や企業理論、環境経済学に現れる最適制御問題の解の特徴づけが常微分方程式の境界値問題となる。そこでは、資本蓄積に関する状態変数に関して初期値を与え、補助変数 (影価格) に対する補助方程式に関して終端値を与えられる。

2 元連立常微分方程式程度の境界値問題は、射的法で数値的に解くことができる。**射的法**は一種のグリッド・サーチであり、与えられた終端値を満たす解を、未定の初期値をある範囲内で可能な限り動かして見つけようとするものである。