

以下の4つの課題のうち3つを選択してレポートを書け。(採点して, 7割以上の出来ならば A, 7割未満 5割以上のできならば B, 5割未満 3割以上のできならば C を成績につける.)

1 パレート最適な配分: 線形な効用関数の場合

経済主体は主体1と主体2で, 財も財1と財2で識別される経済を考える. 財1の社会全体の存在量を5, 財2の社会全体の存在量も5とする.

1.1 基本問題

主体1と主体2の効用関数を

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11} + x_{12}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21} + x_{22}$$

とする. この場合のパレート最適な配分の全体を求めよ.

1.2 応用問題

二人の主体が取引前に各財を $(5/2, 5/2), (5/2, 5/2)$ もっている場合の完全競争均衡配分を求め, 厚生経済学の基本定理がどのような状況で成立するかを調べよ.

2 生産の最適化と収穫法則

生産物の量を y , 投入物1の量を k , 投入物2の量を ℓ で表すとき, 生産関数が

$$y = k^{\frac{1}{3}} \ell^{\frac{2}{3}}$$

であるとして, 生産物価格を p , 投入物1の価格を r , 投入物2の価格を w で表わし, これらは市場で定まると仮定する.

2.1 収穫不変の場合

y だけ生産するときの各投入物の要素需要関数と費用関数を, 費用最小化問題によって求めよ. さらに, ラグランジュ未定乗数が費用関数の y に関する偏微分に等しいことを確認せよ.

2.2 収穫逓減の場合

生産関数を

$$y = k^{\frac{1}{3}} \ell^{\frac{1}{3}}$$

と修正するとき, y だけ生産するときの各投入物の要素需要関数と費用関数を, 費用最小化問題によって求めよ. 収穫不変の場合と結果を比較して何がわかるか.(限界費用に注目せよ.)

3 Kuhn-Tucker 定理の応用

資本金 C 円を投資プロジェクト 1,2,3 に x_1 円, x_2 円, x_3 円投下するものとしよう。プロジェクト j の収益は

$$\alpha_j x_j - \frac{1}{2} \beta_j x_j^2$$

であると仮定する。(各 α_j, β_j は正の定数とする。) 収益合計を最大化するという意味で最適な投資計画を, Kuhn-Tucker 定理を用いて考えてみる。制約式は

$$\sum_{j=1}^3 x_j \leq C, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

である。ここで

$$H = \sum_{j=1}^3 (\alpha_j / \beta_j), \quad K = \sum_{j=1}^3 (1 / \beta_j)$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ。

1. $C > H$ ならば, 投下資金の合計は資本金を下回ることを示せ。
2. 各 j について $\alpha_j > (H - C) / K$ ならば, どのプロジェクトに対しても正の資金投下があることを示せ。
3. 投資資金がゼロになってしまうプロジェクトは, どんなプロジェクトなのか。

4 CES 生産関数

$$y = (\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \rho < 1$$

を CES 生産関数という。要素価格を q_1, q_2 と記すとき, 費用関数を求めよ。