第3章　ラグランジュの方法（古典的条件つき最大化）

3.1　ラグランジュの方法（古典的条件つき最大化）

3.1.1　序

1951 年に Kuhn-Tucker による，不等式制約のもとでの非線形関数を最大化する非線形計画法の論文が発表されるまで，制約条件のもとでの関数の最大化問題は，ラグランジュ乗数法によって考えられてきた．

この節の主題であるラグランジュ乗数法は古くから知られている手法であり，1930 年代から 1940 年代にかけてのミクロ経済学，特にサミュエルソンやヒックスらによる一般均衡理論や厚生経済学の構築に用いられた．

その本質は以下の簡単な例が示すように,「変数の消去」によって制約条件つきの最大化問題を，制約条件のない最大化問題に帰着させることにある．この点は後に扱う，Kuhn-Tucker による非線形計画法を決定的にことなる．学生諸君は形式的な類似によって，両者を同一のものと考えてはならない．

さて，$F(x_1, x_2)$ を $G(x_1, x_2) = 0$ のもとで最大化する問題を考える．例えば，$F(x_1, x_2)$ を効用関数，$G(x_1, x_2) = 0$ を予算制約式，$p_1x_1 + p_2x_2 - I = 0$ と考えれば消費者需要のモデルになり，$F(x_1, x_2)$ を利潤 $p_1x_1 + p_2x_2$ と考え，$G(x_1, x_2) = 0$ を生産関数による技術制約 $x_1 = \sqrt{-x_2}$ と考えれば，生産者の問題になる．ただし，後者では負の生産量は投入量であるという扱いをしている．つまり，x_2 は投入量をあらわすと考える．

二つの変数 x_1,x_2 が $G(x_1, x_2) = 0$ という関係で縛られるから，もし x_2 が x_1 について解けるとすると，

$$x_2 = \phi(x_1)$$

のように書けて，

$$G(x_1,\ \phi(x_1)) = 0$$

を満たす．こうした ϕ の存在を局所的に保証するのが陰関数定理である．すると,「$F(x_1, x_2)$ を $G(x_1, x_2) = 0$ のもとで最大化する」という問題は,「$F(x_1, \phi(x_1))$ を最大化する」という制約条件なしの問題に帰着される．この問題の必要条件は，後に厳密に示すが x_1 について微分してゼロとなることである．

$$\frac{\partial F(x_1, \phi(x_1))}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0 \tag{3.1}$$

がこの場合の必要条件である．

一方，$G(x_1, \phi(x_1)) = 0$ の左辺を x_1 について微分しても右辺が定数だから，

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x_2}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0$$

を得る．つまり，

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x_1}}{\frac{\partial G}{\partial x_2}}$$

これを，(3.1) に代入して，まとめると，いわゆる接点条件

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial G}{\partial x_1}}{\frac{\partial G}{\partial x_2}} \tag{3.2}$$

を得る．前述の経済学の例で言えば，限界代替率が価格に等しいという条件に解釈される．

(3.2) は

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial G}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial G}{\partial x_2}}$$

と書き直せる．この両辺の値を $-\lambda$ と定義することにすると，

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0$$

という式が得られる．これは，ラグランジュ未定乗数法から得られる最適のための必要条件にほかならない．

以上，制約条件のある最大化問題は，陰関数定理によって制約なしの最大化問題に帰着され，そこから得られる最適のための必要条件がラグランジュ未定乗数法から得られる必要条件に等しいことを簡単な例に対して確認した．

次節以降では，上の議論を一般化してみる．

3.1.2 準備

記法

本論に入るまえに，記号についての約束ごとを書いておく．今，n 次元ベクトル $\mathbf{x}$ を独立変数として値を m 次元ベクトルとしてとる写像 $\mathbf{h}$ を考える．以下，ベクトルは列ベクトルとして考える．またベクトル $\mathbf{y}$ を転置した行ベクトルを ${}^t\mathbf{y}$ とかくことにする．よってベクトルの内積 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ は ${}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$ のようにも書ける[1]．

さて上のことを成分表示で書くと，

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix}$$

[1] ここでは，ベクトル値をとる写像を太文字であらわしたが，実数を値にとる写像は普通の文字であらわすことにする．

今$\mathbf{h}$は微分可能として，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \frac{\partial h_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

を$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}$あるいは$\mathbf{h}_{\mathbf{x}}$と書くことにする．

さらに，$m=1$のとき，$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$を$ij$要素に持つ行列をヘッセ行列といい，$\mathbf{h}_{\mathbf{xx}}$と書いたりする．

注意 1 この節を通じて，特に断らない限り関数は連続微分可能であると仮定する．

極値

まず，極値の定義をしておこう．

定義 1 $\mathbf{R}^n$の１点$\mathbf{x}^*$の近傍で定義された関数$f(\mathbf{x})$が$\mathbf{x}^*$で極小値をとるとは

$$(\exists\delta)(\forall\mathbf{x})\left[0<|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*|<\delta \quad \longrightarrow f(\mathbf{x}^*)<f(\mathbf{x})\right]$$

が成立することである．極大値は，$\longrightarrow$の右の不等式の向きを逆転したのが定義になる．

さて，次の定理が微分可能な関数fについて言える．

定理 1 $\mathbf{R}^n$の１点$\mathbf{x}^*$の近傍で定義された微分可能な関数$f(\mathbf{x})$が$\mathbf{x}^*$で極小値（極大値）をとるなら，$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)=0$である．

[証明] 背理法で行う．いま$f(\mathbf{x})$が$\mathbf{x}^*$で極小値（極大値）をとるとする．さらに，$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\neq\mathbf{0}$と仮定する．微分の定義から

$$f(\mathbf{x}^*+\mathbf{h})=f(\mathbf{x}^*)+f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(\mathbf{h}),$$

ここで，$o(\mathbf{h})$ は

$$\lim_{|\mathbf{h}|\to 0} \frac{|o(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0$$

である．いま $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ であるから，$|\mathbf{h}|$ が十分小さいとき，$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\cdot \mathbf{h} > 0$ とも $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} < 0$ ともすることができる．これは，x^* が極値ではありえないことを示す.（証明おわり）

なお，上の定理で $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = 0$ が極値をとるための必要条件であって，十分条件でないことに注意しよう．このことは以下の例でわかる.

例 1

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

とする．この関数は原点 $(0,\ 0)$ において

$$f_{\mathbf{x}} = (0,\ 0)'$$

しかし，

$$h_1 \neq 0 \ \longrightarrow\ f(h_1, 0) - f(0,0) = h_1^2$$

$$h_2 \neq 0 \ \longrightarrow\ f(0, h_2) - f(0,0) = -h_2^2$$

となるから $f(0,0)$ が極値ではない.

注意 2 一般に $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ を満たすような点 $\mathbf{x}^*$ を停留点という．先の定理 *1* では，停留点であることが極値のための必要条件であることを明らかにしている.

次の定理は，停留点が極値であるための十分条件を示す.

定理 2 $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ を満たす点（停留点）は，２次形式 ${}^t\mathbf{h} f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{h}$ が正定値（負定値）であるとき，f は $\mathbf{x}^*$ で極小値（極大値）をとる.

[証明] $|\mathbf{h}|$が十分小さいときは

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^*) + f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}{}^t\mathbf{h} f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{h} + O(\mathbf{h}) \longrightarrow 0$$

が成立する．ここで，

$$\lim_{|\mathbf{h}|\to 0} \frac{|O(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|^2} = 0$$

である．仮定により $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ より

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}{}^t\mathbf{h} f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{h} + O(\mathbf{h})$$

今${}^t\mathbf{h} f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{h}$が正定値とすると，$\mathbf{x}^*$の近傍において，$\mathbf{x}^*$でない任意の$\mathbf{x}$に対して

$$f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$$

が成立する．これは，fはx^*で極小値をとることを意味する．

注意 3 極大値の場合も同様である．

3.1.3　問題設定

さて，いよいよ制約条件つきの最適化問題の定式化にはいる．関数は，これまでと同じ設定のものを考える．

制約条件はm個の関数$g_i(\mathbf{x})$,　$(i = 1, 2, \ldots, m;\ \ m < n)$によって

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0$$

としてあらわされるものとする．ただし，次の仮定を設ける．

仮定 1

$$rank\ \mathbf{g}_{\mathbf{xx}} = m$$

我々の問題は次のものである．

問題 1

$$Maximize \qquad f(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

$$subject\ to \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

3.1.4　ラグランジュの未定乗数法

この節の主要な結論は次の定理である．

定理 3 問題 *1* において，f が極値を持つための必要条件と関数

$$\varphi(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + {}^t\lambda\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

が停留点を持つ必要条件は一致する．ただし，

$$\lambda = {}^t(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

注意 4 上の $\varphi(\mathbf{x}, \lambda)$ をラグランジュ関数 *(Lagrange function)*，λ をラグランジュ乗数 *(Lagrange multiplier)* とよぶ．

[証明] 証明は，3.1.1 節でやった議論を多変数に拡張するだけである．

$\mathbf{y} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m})$，$\mathbf{z} = {}^t(x_{n-m+1}, \ldots, x_n)$ とおき，$f(\mathbf{x})$ と $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ をそれぞれ $f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$，$\mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ と書くことにする．このとき制約条件 (3.4) は

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{0} \tag{3.5}$$

と書かれる．

問題 1 を考えた場合の極値を $\mathbf{x}^*$ とすると，$\mathbf{x}^* = (\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$ と書かれる．

また，rankについての仮定から極値を与える点$\mathbf{x}^* = (\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$の近傍で，

$$\det \mathbf{g}_{\mathbf{xx}} \neq \mathbf{0} \tag{3.6}$$

と考えてよい．そのとき，陰関数定理によって，$\mathbf{y}$の関数$\psi : \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}^m$が存在して，

$$g(\mathbf{y}, \psi(\mathbf{y})) = 0, \quad \mathbf{z}^* = \psi(\mathbf{y}^*)$$

を満足する．

$$F(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \psi(\mathbf{y}))$$

とおいて，これを$\mathbf{y}$について極値を求める問題を考えた場合，極値であるための必要条件と，元々の問題1の極値の条件を比較する．

$F(\mathbf{y})$は$\mathbf{x}^* = (\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*))$において極値をとるから，

$$F_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}$$

これを$F(\mathbf{y})$の定義を使って書き換えると，

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*)) + f_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*))\psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}. \tag{3.7}$$

となる．[2] また，$\mathbf{g}(\mathbf{y}, \psi(\mathbf{y}))$についても$\mathbf{y}$について微分し，$\mathbf{y}^*$で評価すると，

$$\mathbf{g}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*)) + \mathbf{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*))\psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

となる．左辺第1項は$m \times (n-m)$行列，左辺第2項は$m \times m$行列と$m \times (n-m)$行列の積である．

(3.6) より，$\mathbf{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*))$ には逆行列が存在するから，

$$\psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*) = -\mathbf{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*))^{-1}\mathbf{g}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*)) \tag{3.9}$$

[2] 左辺第1項は $n-m$ 次元ベクトル，左辺第2項は m 次元ベクトルと $m \times (n-m)$ 行列の積である．

これを，(3.7) に代入して

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*)) - f_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*))\mathbf{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*))^{-1}\mathbf{g}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*)) = \mathbf{0} \tag{3.10}$$

あるいは，$\mathbf{x}^* = (\mathbf{y}^*, \psi(\mathbf{y}^*))$ を使って，

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*) - f_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}^*)^{-1}\mathbf{g}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \tag{3.11}$$

一方，ラグランジュ関数

$$\varphi(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + {}^t\lambda\mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{3.12}$$

が条件なしで停留値を持つための必要条件は，

$$\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \lambda) = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) + {}^t\lambda\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \tag{3.13}$$

$$\psi_{\lambda}(\mathbf{x}^*, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

前者は $\mathbf{x}^* = (\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$ を考えると，

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \lambda) &= f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*) + {}^t\lambda\mathbf{g}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \\ \psi_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}^*, \lambda) &= f_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}^*) + {}^t\lambda\mathbf{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

と書ける．これより，

$${}^t\lambda = -f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}^*)^{-1}$$

これを (3.14) の最初の式に代入すると

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*) - f_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}^*)^{-1}\mathbf{g}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

これは，先の条件に一致する.（証明おわり）

3.1.5　経済学上の例

ここでは経済学によく表れる例を幾つか取り上げる．

対数線形効用関数と消費者需要

二つの財を考え，それぞれの需要量をx，yであらわし，効用は

$$U(x,y) = \alpha\log x + \beta\log y \tag{3.14}$$

で表わされる．[3] また第１財，第２財価格はそれぞれp，qとし，所得をIで記す．このとき，予算制約式は

$$px + qy = I \tag{3.15}$$

ラグランジュ関数を作ると，

$$L(x,y,\lambda) = \alpha\log x + \beta\log y + \lambda\left(I - px - qy\right) \tag{3.16}$$

これから１階の条件を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\alpha}{x} - \lambda p = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\beta}{y} - \lambda q = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= I - px - qy = 0 \end{aligned}$$

最初二つから，

$$\lambda = \frac{\alpha+\beta}{I} \tag{3.17}$$

これを用いて，需要関数が

$$x(p,q,I) = \frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p} \tag{3.18}$$

$$y(p,q,I) = \frac{\beta I}{(\alpha+\beta)q} \tag{3.19}$$

が得られる．

以上が需要関数を導く例であった．以下では，幾つかの補足をしておく．

[3] これは，$u(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ を対数関数で単調変換して得られた効用関数と考えることができる．

注意 5 各財に対する支出の所得に対する割合を計算すると

$$\frac{px}{I} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \frac{qy}{I} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \tag{3.20}$$

となる．つまり，各財に対する支出配分は価格や所得から独立になっている．これは，エンゲル曲線が直線になっていることを意味する．こうした，結果が出ることは，対数線形型とよばれる *(3.14)* を採用したためである．より一般的には，*homothetic* 型効用関数の場合，同様の結果が得られる．[4]

注意 6 *(3.17)* の λ はしばしば，所得の限界効用といわれる．これは，つぎのような理由からである．

まず，p, q, I の関数として導かれた需要関数，*(3.18)(3.19)* を効用関数 *(3.14)* に代入することで，間接効用関数

$$v(p,q,I) = \alpha \log \frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p} + \beta \log \frac{\beta I}{(\alpha+\beta)q} \tag{3.21}$$

が得られる．これは，消費者が与件 (p, q, I) のもとで最適行動をとったときの効用水準を表わす．これを，所得 I について偏微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{\alpha+\beta}{I} \tag{3.22}$$

となり，*(3.17)* の右辺に一致する．

このようにラグランジュ乗数は，非線形計画法を経済学に応用したとき常に本質的な意味をもつ．なぜそのような解釈を一般的に持つのかはこの講義自体の一つのテーマとなる．

3.1.6　ラグランジュ乗数の意味

すぐ上で示したように，ラグランジュ乗数は経済学的に意味のある解釈が可能になる場合がほとんどである．ここでは，一

[4] homothetic な効用関数とは，適当な単調変換によって一次同次関数になるような関数である．

般的な最適化問題におけるラグランジュ乗数の意味を考えてみる．問題の設定を次のように，若干修正する．

$$\text{maximize} \quad f(\mathbf{x}) \quad \text{subject to} \quad \mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{3.23}$$

注意 7 この定式化は，以前の定式化と基本的には同じである．異なるのは，制約条件にパラメター$\mathbf{b}$が加わったことだけである．実際，$b = 0$とおけば，以前の問題設定と同じになる．また，ここでの問題設定において$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})$ とおけば，以前の問題設定に帰着される．

いま，制約条件

$$\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

を全微分してみよう．

$$d\mathbf{b} = \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{3.24}$$

つまり，左辺の$d\mathbf{b}$が微小に変化したとき，制約条件があいかわらず成立しつづけるには，右辺のベクトル$d\mathbf{x}$がどうならなくてはいけないかを示唆する．具体的には，m元連立方程式によって定まるn次元ユークリッド空間の部分空間上にdxがなくてはならないということである．

$$\begin{pmatrix} db_1 \\ db_2 \\ \vdots \\ db_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

さて最大化のための必要条件は，$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})$に対して，これまでの結果を応用して，

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + {}^t\lambda\bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

が最適点で成立することである．これは，

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + {}^t\lambda(-\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \tag{3.25}$$

考えたいのは，$d\mathbf{b}$ が $\mathbf{b} + d\mathbf{b}$ に変化したときに，最適解は変化し，それにともない $f(\mathbf{x})$ の値も変化するはずであるが，それがどれだけ変化するかである．一般に $df(\mathbf{x})$ を最適条件を考慮して評価すれば，その変化分がわかる．すぐ上の式 (3.25) を変形し，

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = {}^t\lambda\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \tag{3.26}$$

を得る．

一方，目的関数の値の変化は dx によって局所的には

$$df(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{3.27}$$

であるから，これに最適条件 (3.26) を代入して

$$df(\mathbf{x}) = {}^t\lambda\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{3.28}$$

を得る．

ここで，右辺は $1 \times m$ 行列と $m \times n$ 行列と $n \times 1$ 行列の乗算になっていることに注意せよ．さらに，この式に (3.24) を代入して，

$$df(\mathbf{x}) = {}^t\lambda d\mathbf{b}$$

を得る．この式が，$\mathbf{b}$ が $\mathbf{b} + d\mathbf{b}$ に変化したときに変化する最適値の値を示している．

注意 8 λ の次数は制約条件の数と同じである．

とくに，$d\mathbf{b} = {}^t(0, \ldots, 0, db_k, 0, \ldots, 0)$ であるとき，つまり，k 番目の制約条件がゆるまったとき，

$$df(\mathbf{x}) = \lambda_k db_k$$

と書かれ，

$$\frac{df(\mathbf{x})}{db_k} = \lambda_k$$

となる．これは，ラグランジュ乗数の第 k 要素が，k 番目制約が限界 1 単位緩和されたとき，どの程度最適値が改善されるかを，表している．先の消費者需要の問題で，所得が限界 1 単位増加したとき，最適解のもたらす効用がどれだけ改善されるかが，ラグランジュ乗数になることを具体的に示したことを一般的に示したことになる．

注意 9 最適値を所与のベクトル b の関数として $x^*(b)$ のように記すことにすると，上のことは

$$\frac{\partial}{\partial b_k} f(\mathbf{x}^*(\mathbf{b})) = \lambda_k$$

ということを表している．

注意 10 学生諸君はこの時点で，経済学が

- 限りある資源と，さまざまな手段
- 人間の欲望

を考え，後者を前者の制約のもとで最大にする条件を研究するということを思い出して欲しい．ラグランジュ乗数は，制約の変化が欲望・満足にどれだけ貢献するかのバロメターであることを示している．

注意 11 制約を緩めることの意味は，制約集合

$$X_b = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}\}$$

が，$\mathbf{b} + d\mathbf{b}$ の変更にともなって

$$X_{\mathbf{b}+d\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b} + d\mathbf{b}\}$$

になったとき，

$$X_{\mathbf{b}} \subset X_{\mathbf{b}+d\mathbf{b}}$$

になることを指す．制約をどう考えるかによっては，$\mathbf{b}$ の増加がこの意味の制約の緩和にならないので，$\mathbf{g}$ の符号づけの方向を考えるのが大切である．つまり，消費者需要の問題でいうと，$\mathbf{g}(\mathbf{x})$ として，$I - px - qy$ を考えるか，$px + qy - I$ を考えるかの問題である．

3.1.7　経済学の例ふたたび

今度は生産者の問題を考える．Q を生産物の量，K を資本の量，N を労働投入量とする．p, r, w をそれぞれ，生産物価格，資本の賃料，賃金率とする．まず，生産関数を

$$Q = \sqrt{K} + \sqrt{N} \tag{3.29}$$

と考える．まず，最初に，Q を固定して考えて費用関数を導く．つまり，

$$\text{maximize} \quad -rk - wN \quad \text{subject to} \quad Q = \sqrt{K} + \sqrt{N}$$

という問題を考える．つまり，生産の等量曲線の下での費用最小化問題である．ラグランジュ関数は

$$L(K, N, \lambda) = -rK - wN + \lambda(\sqrt{K} + \sqrt{N} - Q)$$

であり，これを K, N, λ について微分してゼロとおいて，一階の条件を求めると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial K} &= -r + \frac{1}{2}\lambda K^{-1/2} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial N} &= -w + \frac{1}{2}\lambda N^{-1/2} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \sqrt{K} + \sqrt{N} - Q = 0
\end{aligned}$$

これらから，$K^{1/2}$, $N^{1/2}$ を消去して，

$$\lambda = \frac{2wrQ}{w+r}$$

を得る．これは，生産の制約が緩和したとき（この場合，生産が限界単位増加したとき）増加する費用を表す．つまり，限界費用関数である．

次に，

$$\text{maximize} \quad pQ - rk - wN \quad \text{subject to} \quad Q = \sqrt{K} + \sqrt{N}$$

を考える．つまり，利潤最大化問題である．このとき，上で求めた最大化の一階条件に

$$p - \lambda = 0$$

を加えたものが，一階条件になる．このことは限界費用が生産物価格に等しいという条件にほかならない．