

2003年度経済数学II(伊藤) 中間レポート 課題

1 \mathbf{x} を n 次元ベクトルとして制約条件は m 個の関数 $g_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, \dots, m$) によって

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

と

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

の制約のもとで, $f(\mathbf{x})$ を最大にするという問題は, 授業で行なった定式化の特殊ケースである. なんとなれば, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ の部分を, n 個の余分な非負制約として扱えばよいだけである. この問題設定に対して, この講義の Kuhn-Tucker の必要条件を適用して, 最大化の必要条件を求めよ.

2 資本 K と労働 L を投入要素とする生産関数

$$Y = \left(L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

を考える. 賃金率 w , 資本用役価格 r を所与として,

3.1 資本が固定的として, 短期費用関数をもとめなさい.

3.2 資本も可変的として, 長期費用関数をもとめなさい.

3.3 長期費用関数が短期費用関数の包絡線になっていることを確かめなさい.

3 x を 2 次元ベクトル (x_1, x_2) とするとき,

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1 x_2 - 1 \\ g_2(x) = x_2 - x_1^2 \\ g_3(x) = x_1 \end{cases}$$

という三つの関数を考える. 不等式 $g_1(x) \geq 0$, $g_2(x) \geq 0$, $g_3(x) \geq 0$ を同時に満たす $x = (x_1, x_2)$ を $x_1 x_2$ 平面上に図示せよ.

4 2 変数関数 $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - 2y^2 + 6x$ を以下の制約の下で最大化することを考える.

$$\begin{cases} g_1(x, y) = 3x + 4y - 6 \leq 0 \\ g_2(x, y) = -x + 4y^2 - 2 \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

(1) Kuhn-Tucker の必要条件を書き下せ.

(2) (1) を使って, 最適点を求めよ.