以下の 5 つの課題のうち 4 つを選択してレポートを書くこと．(全部の課題に挑戦してもよい．)

1　計算練習

効用関数を

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$$

とするとき、所得の限界効用（ラグランジュ乗数)、各財の需要関数を求めよ.

2　Kuhn-Tucker 定理の応用

消費に外部性がある場合の社会的厚生の最大化を考える．第 1 個人、第 2 個人の効用関数をそれぞれ

$$u_1(y_1, y_2) = y_1 - y_2^2, \ \ u_2(y_1, y_2) = y_2 - y_1^2$$

とする．ここで、$y_i, (i = 1, 2)$ は、第 i 個人が消費する財の量である.（各個人は嫉妬深く、他人が多く消費するほど自分の満足が下がると考えよ.）社会的に存在する財の総量を Y であらわす．社会的厚生は各個人の効用の和と考える．今、資源制約 $y_1 + y_2 \leq Y$ の下で、社会的厚生 $u_1(y_1, y_2) + u_2(y_1, y_2)$ を最大にするという問題を考える.

2.1 $Y = 1/2$ のとき、社会的厚生を最大にする配分 y_1, y_2 をもとめよ.

2.1 $Y = 2$ のとき、社会的厚生を最大にする配分 y_1, y_2 をもとめよ.

2.3 上記の 2 つの場合の結果を Kuhn-Tucker 定理に基づいて比較論評しなさい.

3　凸集合の性質

以下のような凸集合を考える.

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}$$

$$C_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

$$C_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

1. $C_1 + C_2$ を図示せよ.
2. $C_2 + C_4$ を図示せよ.
3. $\{(2, 0)\} + C_2$ を図示せよ.
4. $C_3 + C_4$ を図示せよ.
5. $C_2 - (\{(2, 0)\} + C_2)$ を図示せよ.

(4 番目と 5 番目の問題は難しいかもしれない．)

4　無裁定条件の特徴づけ

証券価格ベクトルを

$$ {}^t\mathbf{q} = (100 \quad 100) $$

とし，配当行列を

$$ D = \begin{pmatrix} 130 & 120 \\ 80 & 70 \end{pmatrix} $$

とする場合裁定はあるか.

また $\mathbf{q}$ は上と同一で

$$ D = \begin{pmatrix} 130 & 120 \\ 80 & p \end{pmatrix} $$

とするとき，無裁定となる p の値の範囲を確定せよ．(配当行列については，講義ノートを参照すること)

5　基本定理の証明

無裁定であることの必要十分条件が，状態価格ベクトルの存在であることを，Stimke の補題を使って証明しなさい．(Stimke の補題は，講義ノートを参照すること）