第6章　数理ファイナンスの基礎

6.1　序

ここでは，数理ファイナンスの基礎となる無裁定条件と，その特徴づけをおこなう．有限事象，有限証券種類の枠組みで中心的な役割をはたすのが，Stimkeの補題あるいはMinkowski-Farkasの定理である．実は，高次元になっても基本的な考え方は不変であるため，この章の内容を理解することは重要である．

6.2　証券と配当

一般に有価証券を現時点もつことで，将来時点において，貨幣単位で測られるいくばくかの購買力が保障される．例えば，100万円の現金をもつ主体が1年もの定期預金を行なえば，1年後100万円の元本に加えて利子率に100万円をかけた利子が手に入る．社債は，定期預金と同様に元利合計をある期間後に約束するものであるが，発行会社の倒産ということになれば完全な償還は行なわれない．

有価証券は将来の決済時点の配当によって峻別される．ただし，前の例にあるように銀行の小額の定期預金のように元本が保証されるものもあれば，社債のように「貸し倒れ」という事態を考慮しなくてはならないもの，株式のように将来時点での株式配当と価格上昇による売却益がここでいう広義の配当を構成し，その額が状況によって様々に変化しうるものもある．

よって，$i = 1, 2, \ldots, S$ の有限個の状況が考慮されるとき, それぞれの状況における証券 1 単位あたりの配当を列挙することで，各証券は完全に特徴づけられる．よって証券の種類が $j = 1, 2, \ldots, N$ であるとき証券市場は，S 行 N 列の行列

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{S1} & d_{S2} & \cdots & d_{SN} \end{pmatrix}$$

によって規定される．d_{ij} は第 j 証券 1 単位の i 状態における配当額である．

6.3　証券取引と裁定

N 種類の証券をそれぞれ x_j 単位購入することを，**ポートフォリオ**選択とよぶ．これはベクトル

$${}^t\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_N)$$

であらわされる[1]．

各要素はプラスであるとき購入を，マイナスであるとき空売りを表す．**空売り**とは，空売りする時点で証券を借りて瞬時に売却することを言う.（空売りした場合には将来時点でその証券を返却する必要がある.）

[1] このノートではベクトルは列ベクトルを基本に考える．前に t をつけて転置ベクトルを使うのは紙面節約のためである．

注意 1 なぜ空売りをする動機を経済主体がもつかといえば，鞘を目論むからである．ある株式 A についての利回りが *5* パーセント，別の株式 B についての利回りが *10* パーセントであることを確信している無一文の主体がいるとする．この主体は，株式 A の保有者から *1* 単位の株式 A を借用し，瞬時に現時点価格で売却して得た現金で株式 B を購入することで，将来時点の利回り *10* パーセントを確保することができる．そこで利回りの低い株式 A を *1* 単位購入してもとの保有者に返却しても，株式 B からの利回りの一部 *5* パーセント分は手元に残る．

もちろん主体が確信するゆえに空売りの動機が生ずるのであって実際にこうした「濡れ手に粟」のような鞘が市場に存在するかは別の話である．

次に各証券1単位の価格を並べたベクトル

$$ {}^t\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_N) $$

を考える．二つのベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{q}$ の内積

$$ {}^t\mathbf{q}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{N} q_j x_j $$

はポートフォリオの購入価額を示す．

ここで裁定(arbitrage)の考え方を導入する．裁定とは，1銭も払うことなくいかなる状況下においてもプラスの利得が保証されるポートフォリオをいう．金融理論において重要なことは裁定が存在しない無裁定状態である．これは次のように連立不等式の解の非存在として表現される．

定義 1 無裁定であるとは，

$$-{}^t\mathbf{q}\mathbf{x} > 0 \text{ かつ } D\mathbf{x} > \mathbf{0}$$

を満たすポートフォリオ $\mathbf{x}$ が存在しないことである．

さらに弱い意味での無裁定ということは

定義 2 弱い意味で無裁定であるとは，任意のポートフォリオ $\mathbf{x}$ に対して

$$D\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Longrightarrow {}^t\mathbf{q}\mathbf{x} \geq 0$$

が成立することである．

注意 2 弱い意味での無裁定の定義を，定義 *1* と比較しやすい形に書き直すことができる．弱い意味で無裁定とは

$$-{}^t\mathbf{q}\mathbf{x} > 0 \text{ かつ } D\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

を満たすポートフォリオ $\mathbf{x}$ が存在しないことである．

上の二つの定義に現れた $D\mathbf{x}$ は S 次元ベクトルであるが，これはポートフォリオ $\mathbf{x}$ の配当時点での各状況下における配当を表す．よってこの S 次元ベクトルが，非負ベクトルになることはいかなる状況においても損をしないこと，正ベクトルになることはいかなる状況においても確実な利得が得られることを意味する．

演習 1　　${}^t\mathbf{q} = (100 \quad 100)$

$$D = \begin{pmatrix} 130 & 120 \\ 80 & 70 \end{pmatrix}$$

の場合裁定はあるか.

また $\mathbf{q}$ は上と同一で

$$D = \begin{pmatrix} 130 & 120 \\ 80 & p \end{pmatrix}$$

とするとき，無裁定となる p の値の範囲を確定せよ.

Stimke の補題より次の定理が得られる.

定理 1 (無裁定の特徴づけ) 無裁定であることの必要十分条件は，

$$ {}^t\phi D = {}^t\mathbf{q} $$

を満たす正の要素からなる S 次元ベクトル ϕ が存在することである.

演習 2 定理 *1* を証明せよ.

また Minkowski-Farkas の定理より次の定理が得られる.

定理 2 (弱い意味の無裁定の特徴づけ) 弱い意味で無裁定であることの必要十分条件は，

$$ {}^t\phi D = {}^t\mathbf{q} $$

を満たす非負の要素からなる S 次元ベクトル ϕ が存在することである.

演習 3 定理 *2* を証明せよ.

6.4　状態価格とリスク中立確率

二つの定理，定理1と定理2は，無裁定条件を完全に特徴づける．ただしこの時点で，ベクトル ϕ の意味は説明されていない．実は，これがさまざまな金融商品の価格を説明するカギとなるのである．

さて定理に登場する S 次元ベクトル ϕ を**状態価格** (state price) とよぶ．いま無裁定であるとき

$$(\phi_1\ \phi_2\ \cdots\ \phi_S)\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{S1} & d_{S2} & \cdots & d_{SN} \end{pmatrix} = (q_1\ q_2\ \cdots\ q_N)$$

が成立している．無裁定の意味が強かろうと弱かろうと各要素に負になるものはない．$\phi \neq \mathbf{0}$ ならば

$$\phi_0 = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_S > 0$$

とおけば，

$$\hat{\phi}_i = \frac{\phi_i}{\phi_0}, \quad (i = 1, 2, \ldots, S)$$

で定義されるベクトル

$${}^t\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1\ \hat{\phi}_2\ \cdots\ \hat{\phi}_S)$$

は，各要素は非負で和が1になることから，S 個の状態の確率と解釈することができる．この確率を**リスク中立確

率 (risk-neutral probabilities) とよぶ．リスク中立確率を用いると第 j 証券の価格は

$$\frac{q_j}{\phi_0} = \sum_{i=1}^{S} \hat{\phi}_i d_{ij}, \quad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{6.1}$$

とあらわされる．右辺は第 j 証券の配当ベクトル

$$^t\mathbf{d}_j = (d_{1j} \ d_{2j} \ \cdots d_{Sj})$$

の「期待値」であると考えられる．以下でこの期待値を $\hat{E}(\mathbf{d}_j)$ のように書く．

式 (6.1) の意味を確定するために次のようなことを考える．もし各状況下において 1 の配当をもたらすポートフォリオがあったとする．つまり

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{S1} & d_{S2} & \cdots & d_{SN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^S$$

である．このような $\bar{\mathbf{x}}$ を無リスクポートフォリオあるいは無リスク債券という[2]．さて

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_S \\ &= (1 \ \ 1 \ \ \cdots \ 1) \cdot (\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_S) \\ &= (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \cdots \bar{x}_N)^t D(\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_S) \\ &= (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \cdots \bar{x}_N) \cdot (q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_N) \end{aligned}$$

[2]無リスク債券の厳密な対応物は現実にないかもしれないが，ごく近いものとして国債や都市銀行の定期預金を想像すればよい．

が成立する．このことは，状態価格の総和 ϕ_0 が無リスク債券の購入価額に等しいことを意味する．別の言い方をすると，将来時点において確定配当 1 を得る証券の価格が ϕ_0 ということである．これは，ϕ_0 が割引率という意味をもつことでもある．すると式 (6.1) は

$$q_j = \phi_0 \hat{E}(\mathbf{d}_j), \quad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{6.2}$$

と書き直せる．各証券価格は，**無裁定条件が成立している場合**，それぞれの配当ベクトルからリスク中立確率を用いて計算した将来時点の配当の期待値を，無リスク債券の価格である割引率を使って現在に割り戻した，割引現在価値になっているということを意味する．

式 (6.2) は，株式デリバティブをはじめとするありとあらゆる金融商品，金融派生商品の価格決定の基本公式になっている．実際，株式のヨーロピアンコール価格に関する有名な Black–Scholes 公式も，株式のランダムウォーク仮説の想定の下で，リスク中立確率を用いた割引現在価値表現から導出することができる．