第5章　凸集合と分離定理

5.1　序

この章では，経済学やファイナンスのほとんどのすべての数理解析において，なんらかの形で関係する，凸集合の分離定理と，それに関連する線形代数の諸定理を扱う．特に Minkowski-Farkas の定理は，数理ファイナンスにおける大前提である「無裁定条件」と密接にかかわるために，この分野におけるほとんど唯一の基礎理論と言ってもよいほどである．以下，凸集合の定義，線形代数の諸定理との関連を順次あつかう．

5.2　位相の概念

位相 (topology) とは，集合 (あるいは空間) の点の間の関係を「遠近」に注目して整理した抽象的な数学構造をいう．この構造を考えることによって，近代の数学は極限や関数の連続性を一般的・普遍的に扱うことがなったといえる[1]．

定義 1 n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ におけるベクトル $\mathbf{x}$ の **ノルム** *(norm)* とは $||\mathbf{x}|| = (\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^2)^{\frac{1}{2}}$ をいう．

注意 1 *1.* ノルムを $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}$ への関数と考えると，これは連続関数である．

[1] topology というと，位相幾何学と訳されることもある．狭い意味での幾何学は,「空間内の部分集合を所与の変換群で分類する」が，位相幾何学は同相写像 (連続な全単射) を変換群とみなす幾何学である．ここであつかう toplogy は，一般位相ともよばれる，開集合の定義を出発点とする点の間の「遠近」をあつかう一般的な構造を，距離・ノルムや内積によって与える．

2. $||\mathbf{x}|| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
3. $||\mathbf{x}||^2 = {}^t\mathbf{x}\mathbf{x}$
4. $||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \geq ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||$
5. $||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$は*2*つのベクトルの距離をあらわす.

定義 2 無限個のベクトルの列$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$を$\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$あるいは単に$\{\mathbf{x}_k\}$と記すことにするとき，これがベクトル$\mathbf{x}$に**収束する**とは，$k \longrightarrow \infty$のとき$||\mathbf{x}_k - \mathbf{x}|| \longrightarrow 0$となることをいう.

注意 2 上の収束を量化記号を使ってより正確に表現すると

$$(\forall \varepsilon)(\exists N)(\forall k)\,[k \geq N \Longrightarrow ||\mathbf{x}_k - \mathbf{x}|| < \varepsilon]$$

となる．つまり，収束先の$\mathbf{x}$の$\varepsilon-$近傍$\{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid ||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| < \varepsilon\}$をどんな大きさにとっても十分大きな番号のベクトルから先はすべて，そのε-近傍にとどまり続けるということで，収束を厳密に表現するのである.

定義 3 $\mathbf{R}^n$の部分集合Xは，任意の$\mathbf{x} \in X$に対して

$$\{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid ||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| < \varepsilon\} \subset X$$

となるような$\varepsilon > 0$が存在するとき，**開集合**であるという.

例 1 空集合ϕならびに$\mathbf{R}^n$は開集合である.

例 2 任意の$\varepsilon > 0$に対して，集合$\{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid ||\mathbf{y}|| < \varepsilon\}$は開集合である.

定義 4 $X \subset \mathbf{R}^n$ に属する点 $\mathbf{x}$ は，$\{\mathbf{y} \mid ||\mathbf{y}-\mathbf{x}|| < \varepsilon\} \subset X$ となるような $\varepsilon > 0$ が存在するとき，**内点**であるという．また X の内点をすべて集めた集合を**内部**あるいは**開核**といい，$\mathring{X}$ と記す．

注意 3 集合 X に対して，明らかに $\mathring{X}$ は X の部分集合である．X が開集合であるとき，$\mathring{X}$ は X と一致する．

注意 4 X に含まれるすべての開集合の合併 *(union)* を作ると内部 $\mathring{X}$ となる．

定義 5 集合 X は，その補集合 X^c が開集合であるとき，**閉集合**という．

注意 5 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 X は，X に属する任意の収束する点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ の収束先 $\mathbf{x}$ もまた X に属するとき，またそのときにかぎって閉集合になる．

定義 6 X を含むすべての閉集合の交わり *(intersection)* を**閉包** *(closure)* とよび，$\bar{X}$ あるいは $cl\, X$ であらわす．

定義 7 X の**境界**とは，$cl\, X \cap cl\,(X^c)$ のことをいう．X の境界を，$bd\, X$ と記す．

注意 6 境界とは，閉包から内部をのぞいた集合にひとしい．

定義 8 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 X は，適当な $\varepsilon > 0$ をとると

$$X \subset \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid ||\mathbf{y}|| < \varepsilon\}$$

となるとき**有界** *(bounded)* であるという．

定義 9 有界な閉集合をコンパクト集合という．

次の，Weierstrassの定理とよばれるものは重要である．

定理 1 $\mathbf{R}^n$の部分集合Xがコンパクトとし，Xからなる任意の点列$\{\mathbf{x}_k\}$から収束する部分点列を選ぶことができる．

5.3　凸集合

凸集合とはへこんだところのない集合である．このことを正確に定義すると以下のようになる．

定義 10 $\mathbf{R}^n$の部分集合Cは，任意に2つとった点$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$と，$0$と$1$の間の任意の値をとる実数$\alpha$に対して

$$\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in C$$

となるとき，**凸集合**とよばれる．

例 3 線分は凸集合である．

$\mathbf{R}^n$の部分集合についての，和とスカラー積を定義しておく．

定義 11 $X_1, X_2 \subset \mathbf{R}^n$について

$$X_1 + X_2 = \{\mathbf{y} \mid (\exists\mathbf{x}_1 \in X_1)(\exists\mathbf{x}_2 \in X_2)\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\}.$$

さらに，実数λに対して

$$\lambda X_1 = \{\mathbf{y} \mid (\exists\mathbf{x}_1 \in X_1)\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}_1\}$$

と定義する．

また「差」についても以下のように定義する.

定義 12 $X_1, X_2 \subset \mathbf{R}^n$ について

$$X_1 - X_2 = \{\mathbf{y} \mid (\exists \mathbf{x}_1 \in X_1)(\exists \mathbf{x}_2 \in X_2)\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\}.$$

と定義する.

演習 1 以下のような凸集合を考える.

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}$$

$$C_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

$$C_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

1. $C_1 + C_2$ を図示せよ.
2. $C_2 + C_4$ を図示せよ.
3. $\{(2, 0)\} + C_2$ を図示せよ.
4. $C_3 + C_4$ を図示せよ.
5. $C_2 - (\{(2, 0)\} + C_2)$ を図示せよ.

(4番目と5番目の問題は難しいかもしれない.)

次の命題が成立する.

命題 1

1. 2つの凸集合 $C_1, C_2 \subset \mathbf{R}^n$ の和も凸集合である.
2. 凸集合 $C \subset \mathbf{R}^n$ のスカラー倍も凸集合である.

3. 任意の個数の凸集合の交わりもまた凸集合である．

演習 2 上の命題を証明せよ．

次の命題は重要である．

命題 2 *1.* 凸集合 $C \subset \mathbf{R}^n$ の閉包 $cl\, C$ も凸集合である．

2. 凸集合 $C \subset \mathbf{R}^n$ の内部 $\overset{\circ}{C}$ も凸集合である..

演習 3 上の命題を証明せよ．*(ただし難しい．)*

5.4 超平面・半空間と凸集合の分離

この節では，凸集合の分離定理を扱う．凸集合の分離定理は，2 次元や 3 次元などの視覚的につかみやすい空間では，証明の必要を感じないほど明らかな定理に思える諸君も多いかもしれない．しかし，厳密な証明は，それほど簡単ではない．

定義 13 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ をゼロでないベクトルとし，c を実数とする．このとき

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} = c\}$$

で定義される集合を**超平面**という．

例 4 *2* 次元ユークリッド空間 *(*平面）における直線 $y = 3x+1$ や $x = 3$ のグラフは超平面である．*(*各自確認せよ．*)*

注意 7 超平面は，空間を二つの部分に分ける．

定義 14 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$をゼロでないベクトルとし，$c$を実数とする．このとき超平面

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} = c\}$$

を境界とする二つの集合

$$H_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} \geq c,\}$$

$$H_- = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} \leq c\}$$

を**半空間**という．これら二つの内部にあたる

$$\mathring{H}_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} > c,\}$$

$$\mathring{H}_- = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} < c\}$$

を**開半空間**とよぶ.

注意 8 $H, H_+, H_-, \mathring{H}_+, \mathring{H}_-$は，すべて凸集合である.

次の定理が，もっとも単純な分離定理であり，すべての分離定理の出発点といえる.

定理 2 $C \subset \mathbf{R}^n$を凸集合，$\mathbf{y} \notin cl\, C$とする．このときある超平面Hが存在して，これに対応する二つの開半空間に対して$\mathbf{y} \in \mathring{H}_-, C \subset \mathring{H}_+$となる.

注意 9 上の定理は，定理の前提を満たす所与の$\mathbf{y}$とCに対して

1. ${}^t\mathbf{p}\mathbf{y} < c$

2. $(\forall \mathbf{x} \in C)\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} > c$

となるベクトル$\mathbf{p}$と実数cの存在を主張している．

注意 10 定理の前提における凸集合Cには，位相に関する仮定は一切おかれていないことに注意しよう．（開集合でも閉集合でも，そのどちらでなくともよい．）

定理2の証明:

注意9のcと$\mathbf{p}$として，

$$f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

で定義される実数値関数に対して決まる

$$\delta = \min_{\mathbf{x} \in cl\, C} f(\mathbf{x})$$

から定まる$c = \frac{1}{2}\delta^2$と，δをもたらす$\mathbf{x}_0 \in cl\, C$から定まる$\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}$が所望のものであることを示す．

まず勝手な点$\mathbf{z} \in C$を一個選ぶ．すると$\mathbf{y} \notin cl\, C$であるから，$C \subset cl\, C$から$\mathbf{y} \notin C$である．ノルムの定義から$\rho = ||\mathbf{z} - \mathbf{y}|| > 0$である．閉球

$$B_\rho(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \leq \rho\}$$

は，明らかに有界な閉集合であり，同時に凸集合でもある．つまりコンパクトな凸集合である．

$$D = B_\rho(\mathbf{y}) \cap cl\, C$$

も，命題1と命題2によりコンパクトな凸集合であることがわかる．Weierstrassの定理によって連続関数$f(\mathbf{x})$はコンパクト集合D上で，最小値$\bar{\delta}$をとる．

$\mathbf{y} \notin cl\,C$から$0 < \bar{\delta} \leq \rho$である．もし$D' \supset D, D' \neq D$なるコンパクト凸集合$D'$をとると，$D'$上での連続関数$f(\mathbf{x})$の最小値は，$\bar{\delta}$に等しいことがわかる．よって$\bar{\delta} = \min_{\mathbf{x} \in cl\,C} f(\mathbf{x})$である．つまり$\bar{\delta}$こそが，所望の値$\delta$となっている．また，$D$上で$f(\mathbf{x})$を最小化する$\mathbf{x}_0 \in cl\,C$は，$cl\,C$の凸性から一意に定まる．そこで$\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}$,$c = \frac{1}{2}\delta^2$とおく．

さて任意の$\mathbf{x} \in C$と$0 < \lambda \leq 1$なる実数λを任意にとると，$cl\,C \supset C$が凸集合であることから$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}_0 \in cl\,C$である．さらに

$$||\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}||^2 \geq ||\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}||^2$$

が成り立つ．これを$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$と内積とノルムの関係を使って整理すると，

$$2\lambda({}^t\mathbf{x}_0 - {}^t\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \lambda^2||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||^2 \geq 0$$

この式をλで割って$\lambda \longrightarrow 0$とし，$\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}$とおいたことを使うと

$${}^t\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq 0$$

を得る．

さらに

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} \geq {}^t\mathbf{p}\mathbf{x}_0 &= {}^t\mathbf{p}\mathbf{p} + {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} \\ &= \delta^2 + {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} \\ &= 2c + {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} \end{aligned}$$

このことと ${}^t\mathbf{p}\mathbf{x}_0 = 2c > c$ から ${}^t\mathbf{p}\mathbf{x} > c$ がわかり，$\mathbf{p}$ の作り方から ${}^t\mathbf{p}\mathbf{y} = 0$ であることから ${}^t\mathbf{p}\mathbf{y} < c$ がわかる．(証明おわり)

定理2をもとに，次の定理を証明することができる．

定理 3 $C \subset \mathbf{R}^n$ を凸集合，$\mathbf{y} \in bd\,C$ とする．このとき $\mathbf{y} \in H$ となる超平面 H が存在して，これに対応する半空間 H_+ に対して $C \subset H_+$ となる．

定理3の証明:

$\mathbf{y} \in bd\,C$ かつ，$(cl\,C)^c$ が開集合であることから，任意の k に対して $\mathbf{y}_k \notin cl\,C$ であり，$k \longrightarrow \infty$ のとき $\mathbf{y}_k \longrightarrow \mathbf{y}$ となる点列 $\{\mathbf{y}_k\}$ が存在する．

点列 $\{\mathbf{y}_k\}$ の各点に対して，定理2によって存在が保証されるベクトルの点列 $\{\mathbf{p}_k\}$ をとる．ただし，一般性を失うことなく $||\mathbf{p}_k|| = 1$ とする．作り方から

$$(\forall \mathbf{x} \in C)(\forall k)\ {}^t\mathbf{p}_k\mathbf{y}_k < {}^t\mathbf{p}_k\mathbf{x}$$

点列 $\{\mathbf{p}_k\}$ はコンパクト集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid ||\mathbf{x}|| = 1\}$ を動くから，定理1により，$\{\mathbf{p}_k\}$ には収束する部分列がある．こ

れを$\{\mathbf{p}_{k_i}\}$とかくことにし，ベクトル$\mathbf{p}$を$k_i \longrightarrow \infty$のとき$\mathbf{p}_{k_i} \longrightarrow \mathbf{p}$となるベクトルを$\mathbf{p}$と定める．

このとき

$$(\forall \mathbf{x} \in C)\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} = \lim_{k_i \longrightarrow \infty} {}^t\mathbf{p}_{k_i}\mathbf{y}_{k_i} \leq \lim_{k_i \longrightarrow \infty} {}^t\mathbf{p}_{k_i}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{p}\mathbf{x}$$

となる．これは，$H = \{\mathbf{x} \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{p}\mathbf{y}\}$とすると，$\mathbf{y} \in H$であり$C \subset H_+$を意味する．(証明おわり)

次に分離定理を証明する．

定理 4 $C \subset \mathbf{R}^n, D \subset \mathbf{R}^n$を凸集合，$C \cap D = \phi$とする．このとき超平面$H$が存在して，これに対応する$2$つの半空間$H_+, H_-$に対して$C \subset H_+, D \subset H_-$となる．

定理4の証明:

$C - D$は，明らかに凸集合である．また$C \cap D = \phi$より$\mathbf{0} \notin C - D$である．ここで二つの場合に分かれる．

$\mathbf{0} \in bd\,(C - D)$の場合，定理3によって$C - D$を原点で支持する超平面$H$が存在する．この場合ある$\mathbf{p}$が存在して

$$(\forall \mathbf{w} \in (C - D))\ 0 \geq {}^t\mathbf{p}\mathbf{w}$$

これは

$$(\forall \mathbf{x} \in C)(\forall \mathbf{y} \in D)\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} \geq {}^t\mathbf{p}\mathbf{x}$$

を意味する．

また $\mathbf{0} \notin bd\,(C-D)$ の場合，定理 2 によってある $\mathbf{p}$ が存在して

$$(\forall \mathbf{w} \in C-D)\ 0 < {}^t\mathbf{p}\mathbf{w}.$$

これは

$$(\forall \mathbf{x} \in C)(\forall \mathbf{y} \in D)\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} < {}^t\mathbf{p}\mathbf{x}$$

を意味する．

どちらの場合も，$H = \{\mathbf{x} \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} = 0\}$ が 2 つの集合を分離していることがわかる．(証明おわり)

5.5 線形不等式の定理

Kuhn-Tucker の定理の証明にも登場した，Minkowski-Farkas の定理は凸集合の分離定理と密接な関係がある．また無裁定条件が状態価格の存在と同値であるという数理ファイナンスにおける最重要の主張も，本質的には凸集合の分離定理(あるいは無限次元における対応物である Hahn-Banacha の拡張定理) を基礎としている．

5.5.1 準備

いくつか定義をしておく．

定義 15 n 次元 *Euclid* 空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 L で，つぎの *2* つの条件

$$(\forall \mathbf{x} \in L)(\forall \mathbf{y} \in L)\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in L$$

$$(\forall \mathbf{x} \in L)(\forall \lambda \in \mathbf{R})\ \lambda \mathbf{x} \in L$$

を満たすものを**部分空間** *(subspace)* とよぶ.

例 5　*1.* 集合 $\{(x,y) \mid x+y=0\}$ は 2 次元 $Euclid$ 空間 $\mathbf{R}^2$ の部分空間である.

2. 集合 $\{(x,y,z) \mid z=0\}$ は 3 次元 $Euclid$ 空間 $\mathbf{R}^3$ の部分空間である.

定義 16 n 次元 $Euclid$ 空間 $\mathbf{R}^n$ の部分空間 L に対して

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid (\forall \mathbf{y} \in L)\ {}^t\mathbf{x}\mathbf{y} = 0\}$$

を満たす集合を L の**直交補空間**とよび $L^{\perp}$ と記す.

注意 11 直交補空間も部分空間である.

$\mathbf{R}^n$ の非負のベクトルからなる集合を $\mathbf{R}^n_+$，正のベクトルからなる集合を $\mathbf{R}^n_{++}$ と記す.

注意 12 $\mathbf{R}^n_+$ の内部が $\mathbf{R}^n_{++}$，$\mathbf{R}^n_{++}$ の閉包が $\mathbf{R}^n_+$ になっており，$\mathbf{0} \notin \mathbf{R}^n_{++}$，$\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n_+$ に注意しよう.

分離定理を使うと以下の定理が証明できる．この定理が一連の線形不等式の定理の出発点となる.

定理 5 n 次元 $Euclid$ 空間 $\mathbf{R}^n$ の部分空間 L とその直交補空間 $L^{\perp}$ をとるとき，次の二つの条件は同値である.

(1) $L \cap \mathbf{R}^n_+ = \{\mathbf{0}\}$

(2) $L^{\perp} \cap \mathbf{R}^n_{++} \neq \phi$

定理5の証明:

(2)⇒(1) の証明は，簡単である．(2) を仮定すると，すべての要素が正であるような $L^\perp$ に属するベクトル $\mathbf{y}$ が存在する．このとき $\mathbf{0}$ でない任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n_+$ と内積をとると ${}^t\mathbf{y}\mathbf{x} > 0$ である．これは $\mathbf{R}^n_+$ には $L^\perp$ と直交するベクトルは $\mathbf{0}$ 以外ないことを示す．つまり $(L^\perp)^\perp \cap \mathbf{R}^n_+ = \{\mathbf{0}\}$ である．ここで $(L^\perp)^\perp = L$ に注意して (1) をえる．

(1)⇒(2) の証明は背理法でおこなう．(2) が成立しないと仮定する．$L^\perp$ と $\mathbf{R}^n_{++}$ がともに凸集合であることから，定理 4 によって，$L^\perp$ と $\mathbf{R}^n_{++}$ を分離する超平面 H が存在する．よりくわしくいうと，H を決める $\mathbf{0}$ でない法線ベクトル $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ が存在して

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n_{++})\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} \geq 0$$

$$(\forall \mathbf{x} \in L^\perp)\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} \leq 0$$

となる．最初の条件より $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ がわかる．また第2の条件において，$L^\perp$ が部分空間であることから任意の $\mathbf{x} \in L^\perp$ に対して $-\mathbf{x} \in L^\perp$ であることを使うと ${}^t\mathbf{p}\mathbf{x} < 0$ ではありえないことがわかる．つまり

$$(\forall \mathbf{x} \in L^\perp)\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} = 0$$

となる．これは $\mathbf{p} \in (L^\perp)^\perp = L$ を意味する．つまり

$$\mathbf{p} \in L \cap \mathbf{R}^n_+ \text{ かつ } \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$$

これは(1)に矛盾する．(証明おわり)

線形不等式に関する定理として Stimke の補題とよばれるものが，議論の出発点になる．A を $m \times n$ 行列とすると，A は，$\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$ と考えれば $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$ への線形写像と考えられるし，その転置 ${}^tA$ は $\mathbf{y} \longmapsto {}^tA\mathbf{y}$ と考えれば $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像と考えられる．このとき ${}^tA$ の値域と A のカーネルをそれぞれ

$$\mathrm{Range}^t A = \{\mathbf{z} \mid (\exists \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m)\ \mathbf{z} = {}^tA\mathbf{y}\}$$

$$\mathrm{Ker} A = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

とかくと，$\mathrm{Range}^t A$ と $\mathrm{Ker} A$ は線形部分空間であり，$\mathrm{Ker} A$ は $\mathrm{Range}^t A$ の直交補空間になっている．よって，$L = \mathrm{Range}^t A$ とおいて，定理 5 を適用すると

定理 6 (Stimke の補題) A を $m \times n$ 行列とするとき，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる，すべての要素が正であるベクトル $\mathbf{x}$ が存在するための必要十分条件は ${}^tA\mathbf{y} > \mathbf{0}$ となる $\mathbf{y}$ が存在しないことである．

次に，Kuhn-Tucker 定理の証明でも重要な役割を果たす Minkowski-Farkas の定理を証明する．

定理 7 (Minkowski-Farkas) A を $m \times n$ 行列，$\mathbf{b}$ を $\mathbf{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

(1) $(\forall \mathbf{p})\ \left[{}^t\mathbf{p}A \geq \mathbf{0} \Longrightarrow {}^t\mathbf{p}\mathbf{b} \geq 0\right]$

(2) $(\exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0})\ \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

定理 7 の証明:

(2)⇒(1) の証明は簡単である．(2) と ${}^t\mathbf{p}A \geq \mathbf{0}$ を仮定して，${}^t\mathbf{p}\mathbf{b} \geq 0$ を示せばよい．実際

$$ {}^t\mathbf{p}\mathbf{b} = {}^t\mathbf{p}(A\mathbf{x}) = ({}^t\mathbf{p}A)\mathbf{x} \geq 0 $$

最後の不等式は，非負ベクトル同士の内積がゼロ以上であることによる．

(1)⇒(2) の証明は，以下のようになる．(1) は次の条件と同値である

$$ (\forall \mathbf{p}) \ \left[(\text{not } {}^t\mathbf{p}A \geq \mathbf{0}) \vee {}^t\mathbf{p}\mathbf{b} \geq 0\right] $$

これはさらに，次の条件と同値である．

$$ \text{not } (\exists \mathbf{p}) \ \left[{}^t\mathbf{p}A \geq \mathbf{0} \wedge {}^t\mathbf{p}\mathbf{b} < 0\right] $$

これより，A に m 次元ベクトル $-\mathbf{b}$ を並べて作った $m \times (n+1)$ 行列

$$ B = [A; -\mathbf{b}] $$

に関して ${}^t\mathbf{p}B > \mathbf{0}$ となる $\mathbf{p}$ が存在しないことがわかる．これに (転置されたバージョンの) 定理6を適用すると，正の要素だけからなるある $n{+}1$ 次元ベクトル $\mathbf{z} = (z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1})$ が存在して $B\mathbf{z} = \mathbf{0}$ となる．$\mathbf{y} = (z_1 z_2 \cdots z_n)$ とかくことにすると，$A\mathbf{y} - z_{n+1}\mathbf{b} = \mathbf{0}$ である．ここで各 i について $x_i = z_i / z_{n+1}$ として $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n) \geq \mathbf{0}$ を作ると $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ となる．(証明おわり)