第9章　Black–Scholes モデル

この章では，前の章で扱った株価変化の 2 項モデルの時間間隔を細かくしてゆき，Black–Scholes モデルの前提である，株価が幾何ブラウン運動する状況と極限が一致するようにする．その場合に，2 項モデルによる，ヨーロピアン・オプションの価格決定式である CRR 公式が有名な Black–Scholes 公式になることを示す．

以上のことを示すためには，若干の数学的準備が必要である．そこで，

1. ランダム・ウォーク
2. 確率変数列の収束
3. ブラウン運動 (Winner 過程)

に関して，必要に応じて解説する．

9.1　2 項モデルの細分化

前の章では，$0, 1, \ldots, T$ の $T+1$ 個の時点からなる，T 期間を考えた．任意の $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ を任意にとる．t 期間を $n \in \mathbf{N}$ 個の期間に細分することにしよう．

例 1. $t = 3$，$n = 2$ の場合，$0, 1, 2, 3$ の *3* 時点をとり 3 期間を考えたものが，$0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ の *7* 時点，*6* 期間を考えることになる．

この場合，時点をあらわす添字として，t_i や t_k という添字をもつ時点を考え，i や k が自然数を，t_i や t_k が有理数をとるようにする．

注意 1. なぜこのような時点の表し方をするかというと，最終的に時間を連続時間で扱いたいからである．その途中段階として有限個の時点の識別には i や k を使い，時点が区間 $[0, T]$ のどの位置にあるかを識別するために，t_i や t_k を使う．

注意 2. モデル期間の細分化の過程において登場する，変数のうち単なる添字つけのみで扱われるものは，離散確率過程を意識したもの，括弧つきで $S(t_i)$ のように括弧内に時点を明示した形のものは，連続確率過程を意識したもの，という区別をしている．

2 項モデルを n 個の期間に細分化したとき，細分化するにともなって株価の上方への変化分も $\hat{u} = u/n, \hat{d} = d/n$ のように変更しておく．さらに，無リスク利子率に関しても，純利子率 $r = R-1$ を細分した $\hat{r} = r/n$ を考える．細分した場合の粗利子率は $1+\hat{r} = 1 + r/n$ となることに注意．

以下，期間を細分した場合にも，株価は上昇・下降パラメータ $\hat{u}, \hat{d}$ ならびに無リスク粗利子率 $1+\hat{r}$ で特徴づけられる 2 項過程に従って変化する．

なお，リスク中立確率も期間の細分化にともなって当然

$$\hat{q} = \frac{1+\hat{r}-\hat{d}}{\hat{u}-\hat{d}}, \quad 1-\hat{q} = \frac{\hat{u}-(1+\hat{r})}{\hat{u}-\hat{d}}$$

と修正される．

さて，t_i, t_{i-1}, $i \in \{1, 2, \ldots, nt\}$ の 2 つの時点をとると，その時点にまたがった期間における株価の変化率 (プラス 1）は

$$Y_i = \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}, (i = 1, 2, \ldots, nt)$$

である．

$$Y_1 \times Y_2 = \frac{S(t_1)}{S(t_0)} \times \frac{S(t_2)}{S(t_1)} = \frac{S(t_2)}{S(t_0)}$$

$$Y_1 \times Y_2 \times Y_3 = \frac{S(t_1)}{S(t_0)} \times \frac{S(t_2)}{S(t_1)} \times \frac{S(t_3)}{S(t_2)} = \frac{S(t_3)}{S(t_0)}$$

などであるから，一般に

$$\prod_{k=1}^{i} Y_i = \frac{S(t_i)}{S(t_0)},\ (i = 1, 2, \ldots, nt)$$

である．

ここで

$$X_i = \log Y_i$$

とおくと，すぐ上の式の両辺に対数を作用させることにより

$$\log\left(\frac{S(t_i)}{S(t_0)}\right) = \sum_{k=1}^{i} X_i \tag{9.1}$$

となることがわかる．

確率変数列 $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ について，明かに

$$P\{X_i = x \mid S(t_{i-1})\} = \begin{cases} \hat{q} & x = \log \hat{u} \\ 1 - \hat{q} & x = \log \hat{d} \end{cases} \tag{9.2}$$

まず，(9.1) の左辺がどのような性質をもつかみていこう．

9.2　ランダム・ウォーク

まず，ランダム・ウォークを定義する．

定義 1. $\{Y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を以下の性質をもつ確率変数の列であるとする．

独立性 $(\forall n)(\forall i \neq j)\ P(Y_1 = \eta_1)P(Y_2 = \eta_2) = P(Y_1 = \eta_1, Y_2 = \eta_2)$

同一分布 $(\forall i \neq j)$ Y_iと Y_jの分布は同一

このとき，

$$X_n = Y_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i,\ (N = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定義される確率変数の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ をランダム・ウォークという．

例 2. *1* と *-1* のように，符号違いの *2* 値しかとらない確率変数 $\{Y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ をとるとき，上記定義の $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を単純ランダム・ウォークとよぶことがある．また，さらに

$$P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$$

のとき，対称であるという．

定義 2. 一般の確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ は

$$(\forall t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n)\ X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{が互いに独立である}$$

ならば，独立増分をもつという．

演習 1. ランダム・ウォークは，独立増分をもつことを示せ．

定義 3. 一般の確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ は

$$(\forall s > 0)\ X(t+s) - X(t) \text{ の分布が } t \text{ に依存しない}$$

ならば，定常増分をもつという．

演習 2. ランダム・ウォークは，定常増分をもつことを示せ．

9.3　ブラウン運動

さて，この章で株価の 2 項過程の時点の細分化をおこなった．その目的は，細分化の極限が Black–Scholes モデルの前提である幾何ブラウン運動に分布収束するものがあるかを確かめることである[1]．実際には，細分化する手続きにおいて，$\hat{u}\hat{d} = 1$ となるようにすれば，肯定的に確かめられる．

9.3.1　標準ブラウン運動

時点をあらわす添字集合が $\mathbf{R}_+$ であるとき，

$$\mathbf{R}_+ \longrightarrow 1 \text{ 次元確率変数の全体}$$

を連続確率過程という．

注意 3. この場合，連続か離散かは，時間が連続か離散かを問題にしており，分布が離散分布か連続分布かは関係がない．

定義 4. 連続確率過程 $\{B(t)\}_{t\in\mathbf{R}_+}$ は，以下の性質をみたすとき標準ブラウン運動もしくはウィーナー過程とよばれる．

1. $B(0) = 0$

[1] 分布収束については後述．

2. $(\forall t)(\forall s < t)\ B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$

3. $(\forall t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n)\ B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ が互いに独立である

4. 任意のサンプル過程 $t \mapsto B(t)$ は連続である．

注意 4. 標準ブラウン運動は，定常かつ独立な増分をもつ連続確率過程である．しかも特徴づける分布は正規分布というよく知られた分布になっている．さらに，サンプル過程が連続であることには注意すべきである．

さて，$t \geq s$ のとき，$\{B(s) = y\}$ となる事象を条件とする条件付分布関数を

$$P_B(x, y\ y, x) = P(B(t) \leq x | B(s) = y)$$

を推移確率分布関数とよぶ．標準ブラウン運動は定義より

$$P_B(x, y\ y, s) = P_B(x - y, t - s | 0, 0)$$

をみたす．

演習 3. 上のことを示せ．

以下，$P_B(x, t|0, 0)$ を $P_B(x, t)$ と略記する．なお，定義より

$$P_B(x, t) = P(B(t) \leq x | B(0) = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

である．密度関数 (p.d.f.) でいえば

$$p_B(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

である．標準ブラウン運動は，株式その他の金融商品価格の不確実性下の動学を表現するさまざまな枠組みの基礎となる．それでは，標準ブラウン運動の性質をまとめておこう．

命題 1. $0 \leq s < t$ とする．このとき，

1. $E[B(s)] = 0$

2. $Var[B(s)] = s$

3. $E[B(t) - B(s)] = 0$

4. $E[(B(t) - B(s))^2] = 0$

演習 4. 上の命題を証明せよ．

命題 2. $0 \le s_1 < s_2 \le t_1 < t_2$ とするとき，

$$E[(B(s_2) - B(s_1))(B(t_2) - B(t_1))] = 0$$

となる．

[証明] $B(s_2) - B(s_1)$ と $B(t_2) - B(t_1)$ は，標準ブラウン運動の定義から独立である．よって

$$\begin{aligned} E[(B(s_2) - B(s_1))(B(t_2) - B(t_1))] &= E[B(s_2) - B(s_1)] \cdot E[B(t_2) - B(t_1)] \\ &= 0 \cdot 0 \end{aligned}$$

(証明おわり)

命題 3. *E[B(t)B(s)] = min(t,s)*

[証明] $0 \le s = t$ とすると，

$$E[B(t)B(s)] = E[B(t)^2] = Var[B(t)] = t = \min(t, s)$$

次に $0 \le s < t$ とおき，$E[B(t)B(s)] = s$ を示せば十分．$B(s) = B(s) - B(0)$ と $B(t) - B(s)$ は独立である．よって

$$E[B(s)(B(t) - B(s))] = E[B(s)]E[B(t) - B(s)] = 0$$

ところが，

$$E[B(s)(B(t) - B(s))] = E[B(t)B(s)] - E[B(s)^2] = E[B(t)B(s)] - s$$

両方を考慮すると，$E[B(t)B(s)] = s$ をえる．(証明おわり)

他にも，標準ブラウン運動の定義と正規分布の基本性質から，以下の命題をえる．

命題 4.

$$E[(B(t) - B(s))^4] = 3(t - s)^2$$

演習 5. $\{B(t)\}$ を標準ブラウン運動とするとき，$c \neq 0$ に対して

$$X(t) = cB\left(\frac{t}{c^2}\right), \quad (t \ge 0)$$

で定義される連続確率過程 $\{X(t)\}$ も標準ブラウン運動であることを証明せよ.（ヒント：定義を一つ一つ確認する.）

9.3.2　算術ブラウン運動

標準ブラウン運動から算術ブラウン運動が定義される．

定義 5. $\{B(t)\}$ を標準ブラウン運動とするとき，$\sigma \in \mathbf{R}_+, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$X(t) = \mu t + \sigma B(t)$$

で定義される連続確率過程 $\{X(t)\}$ を算術ブラウン運動という．μ をドリフト係数，σ^2 を拡散係数とよぶ．

9.3.3 ランダム・ウォークとブラウン運動

統計学において，統計的に独立な抽出を行なったデータからなる標本の標本平均は，もともとの分布が離散的であろうと連続的であろうと，ある条件の下では中心極限定理によって，正規分布に従うことが示される．

それと似た状況として，離散確率過程としてのランダム・ウォークの極限として算術ブラウン運動を特徴づけることができる．

今，離散確率過程 $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ は，十分小さな Δy に対して，Δy か $-\Delta y$ の 2 種類の値しかとらないものとする．ここで

$$\Delta y \leq \frac{\sigma^2}{\mu}$$

を満たす $\sigma > 0, \mu$ に対して，任意の n について

$$\begin{array}{r} P(Y_n = \Delta y) = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta y \\ P(Y_n = -\Delta y) = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta y \end{array} \tag{9.3}$$

と仮定する．このとき，

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad n \geq 1, X_0 = 0 \tag{9.4}$$

とおくと，$\{X_n\}_{n\geq 1}$ はランダム・ウォークである．

定理 1. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ が *(9.3)*，*(9.4)* で定義されたランダム・ウォークならば，

$$n\Delta t = t$$

$$\sigma^2 \Delta t = (\Delta y)^2$$

のように，$\Delta t, \Delta y$ をとると，ランダム・ウォーク $\{X_n\}_{n\geq 1}$ は，$\sigma > 0, \mu$ で特徴づけられる算術ブラウン運動 $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ に分布収束する．

注意 5. 統計学において，*2* つの確率変数の分布が同一であることを示すのに，積率母関数 $E[e^{tZ}]$ あるいは特性関数 $E[e^{itZ}]$ を用いる．上述の定理でいう分布収束とは，積率母関数あるいは特性関数がランダム・ウォークの時点の細分化とジャンプ幅をうまく細分化していくに従って，ランダム・ウォークの各時点の確率変数の積率母関数なり特性関数が算術ブラウン運動の各時点の確率変数のそれぞれに，近づくことをいう．

[証明] (9.3) より Y_i の積率母関数 $m_{Y_i}(s) = E[e^{sY_i}]$ は各 i に共通で，

$$m_{Y_i}(s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta y\right) e^{s\Delta y} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta y\right) e^{-s\Delta y}$$

である．$e^{s\Delta y}$ と $e^{-s\Delta y}$ をテイラー展開して，

$$e^{s\Delta y} = 1 + s\Delta y + \frac{s^2}{2}(\Delta y)^2 + o((\Delta y)^2)$$

$$e^{-s\Delta y} = 1 - s\Delta y + \frac{s^2}{2}(\Delta y)^2 + o((\Delta y)^2)$$

をえる．これらを使って

$$\begin{aligned} m_{Y_i}(s) &= 1 + \frac{s\mu}{\sigma^2}(\Delta y)^2 + \frac{s^2}{2}(\Delta y)^2 + o((\Delta y)^2) \\ &= 1 + \left(\frac{s\mu}{\sigma^2} + \frac{s^2}{2}\right)(\Delta y)^2 + o((\Delta y)^2) \\ &= 1 + \left(s\mu + \frac{s^2\sigma^2}{2}\right)\Delta t + o(\Delta t) \\ &= 1 + \frac{1}{n}\left(\mu ts + \frac{s^2\sigma^2}{2}t\right) + o(n^{-1}) \end{aligned}$$

ここで，右辺の最後の項は $n \longmapsto \infty$ のとき 0 に近づくことに注意.

X_n の定義を考えると，

$$m_{X_n}(s) = E[e^{sX_n}] = E[e^{s\sum_{i=1}^{n} Y_i}] = \prod_{i=1}^{n} E[e^{sY_i}]$$

であるから

$$m_{X_n}(s) = \left(1 + \frac{1}{n}\left(\mu ts + \frac{s^2\sigma^2}{2}t\right) + o(n^{-1})\right)^n$$

よって

$$m_{X_n}(s) \longmapsto e^{\mu ts + \frac{\sigma^2 ts^2}{2}}, \quad (n \longmapsto \infty)$$

積率母関数の一意性により，

$$X_n \, D \longmapsto X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$

さらに任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon > \mu h + \sigma\sqrt{h}$ をみたすように h をとると，正規分布の定義に戻って積分計算をすることで

$$P(|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon) = o(h)$$

が得られる.（各自が確認せよ.）これにより標本過程の連続性が示された．算術ブラウン運動の他の性質はランダム・ウォークから明かである.（証明おわり）

9.3.4　幾何ブラウン運動

最後に幾何ブラウン運動を定義しておく.

定義 6. 算術ブラウン運動 $\{X(t)\}$ から作られる

$$Y(t) = Y(0)e^{X(t)}$$

を幾何ブラウン運動という.

9.4 Black–Scholes 公式

株価 $\{S_n\}_{n\geq 0}$ が 2 項過程にしたがうとき，9.1 節の細分化による (9.1) はランダム・ウォークとなる．この節では，細分化を極限までもっていったときに，算術ブラウン運動になることを示す．その後，CRR 公式の細分化のプロセスの極限として Black–Scholes 公式を導く．

9.4.1 2 項株価過程から原資産収益率の算術ブラウン運動へ

次の定理が成立する．

定理 2. $\sigma > 0$ に対して，*2* 項株価過程の細分化パラメータが

$$\hat{u} = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad \hat{u}\hat{d} = 1$$

を満たすとき，

$$Z_n = \log\left(\frac{S(t_{nt})}{S(0)}\right), \quad n \geq 1$$

によって定義されるランダム・ウォーク $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ は $n \longmapsto \infty$ のときドリフト係数 $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$，拡散係数 σ^2 の算術ブラウン運動にしたがう．

[証明] $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ が算術ブラウン運動 $\{X(t)\}$ に分布収束することは，t を nt に対応させ

$$n\Delta t = 1, \quad \Delta x = \log\hat{u} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

とおいて定理 1 を適用することで示される．

あとは $\{X(t)\}$ のドリフト係数と拡散係数が主張どおりであることを確かめればよい．Z_n の構成方法からリスク中立確率 Q のもとで

$$E_Q[Z_n] = \sqrt{n}\sigma(2\hat{q}-1)t, \quad Var_Q[Z_n] = 4\sigma^2\hat{q}(1-\hat{q})t$$

と求められる．(各自確認せよ.)

ここでリスク中立確率 Q での上昇確率 $\hat{q}$ は

$$\begin{aligned}
\hat{q} &= \frac{1+\frac{r}{n}-e^{-\sigma/\sqrt{n}}}{e^{\sigma/\sqrt{n}}-e^{-\sigma/\sqrt{n}}} \\
&= \frac{1+\frac{r}{n}-\left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\frac{\sigma^2}{2n}\right)+o(n^{-1})}{\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\frac{\sigma^2}{2n}\right)-\left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\frac{\sigma^2}{2n}\right)+o(n^{-1})} \\
&= \frac{\sigma+\frac{1}{\sqrt{n}}\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+o(n^{-1/2})}{2\sigma+o(n^{-1/2})}
\end{aligned}$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty}\hat{q} = \frac{1}{2}$$

をえる．

これらを用いて

$$\lim_{n\to\infty} E_Q[Z_n] = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t$$

$$\lim_{n\to\infty} Var_Q[Z_n] = \sigma^2 t$$

をえる．(証明おわり)

注意 6. 定理 *2* により，*2* 項株価過程の極限である連続確率過程 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ が

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t, \sigma^2 t\right)$$

を満たすことを含意する．これにより

$$S(t) = S(0)e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma B(t)}, \quad t \geq 0$$

がわかる．これは，株価が幾何ブラウン運動に従うことを意味する．

9.4.2　CRR 公式の極限

細分化された 2 項モデルに対して，無リスク純利子率を $r = R - 1$ と書く事にすると

$$nT \longrightarrow T, \quad 1 + \frac{r}{n} \longrightarrow R$$

とすることで CRR 公式から現時点 0 におけるヨーロピアン・コールの価格とヨーロピアン・プットの価格がそれぞれ

$$C(0,S) = S \times \mathcal{B}_c(\hat{j}^*; nT, \hat{q}') - K\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nT} \times \mathcal{B}_c(\hat{j}^*; nT, \hat{q}) \tag{9.5}$$

$$P(0,S) = K\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nT} \mathcal{B}(\hat{j}; nT, \hat{q}) - S\mathcal{B}(\hat{j}; T, \hat{q}') \tag{9.6}$$

と求まる．ただし，ハットˆをつけた変数は，細分化した場合の変数である．たとえば $\hat{j}^*$ なども細分化された $\hat{u}$ と $\hat{d}$ を用い，さらに上記の変換を考慮して計算される．

2 項分布の分布関数 $\mathcal{B}(i; n, p)$ と補分布関数 $\mathcal{B}_c(i; n, p)$ に関して次の極限定理が成立する．

補助定理 1. $\sigma > 0$ とする．*2* 項過程の上昇幅と下降幅に関して

$$\hat{u} = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad \hat{u}\hat{d} = 1$$

であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_c(\hat{j}^*; nT, \hat{q}') = \Phi(d) \tag{9.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_c(\hat{j}^*; nT, \hat{q}) = \Phi(d - \sigma\sqrt{T}) \tag{9.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}(\hat{j}; nT, \hat{q}) = \Phi(-d + \sigma\sqrt{T}) \tag{9.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}(\hat{j}; nT, \hat{q}') = \Phi(-d) \tag{9.10}$$

が成り立つ．ここで（オリジナルの *2* 項モデルの下降幅と混同することなく，*Black–Scholes* の原論文の記述にあわせて）

$$d = \frac{\log(S/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

とする．

[証明] 4 つとも同様なので，(9.7) のみを示す．2 項モデルにおける q' についても定理 2 でのリスク中立確率の変換と同様に，

$$\hat{q}' = \frac{\sigma + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) + o(n^{-1/2})}{2\sigma + o(n^{-1/2})}$$

をえる．これにより

$$1 - \hat{q}' = \frac{\sigma - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) + o(n^{-1/2})}{2\sigma + o(n^{-1/2})}$$

である．2 項分布 $B(nT, \hat{q}')$ に従う確率変数 X の平均と分散がそれぞれ

$$E[X] = nT\hat{q}'$$

$$Var[X] = nT\hat{q}'(1 - \hat{q}')$$

となるから，

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_c(\hat{j}^*; nT, \hat{q}') &= 1 - P(X \le \hat{j}^*) \\ 1 - P&\left(\frac{X - nT\hat{q}'}{\sqrt{nT\hat{q}'(1 - \hat{q}')}} \le L_n\right) \end{aligned}$$

である．ただし

$$L_n = \frac{\hat{j}^* - 1 - nT\hat{q}'}{\sqrt{nT\hat{q}'(1 - \hat{q}')}}$$

ここで $\hat{j}^*$ の定義から，十分大きな n に対して

$$L_n = \frac{\log(K/S) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + o(n^{-1/2})}{\sigma\sqrt{T} + o(n^{-1/2})}$$

が成立する．ここで

$$\lim_{n\to\infty} L_n = -\frac{\log(S/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = -d$$

をえる．

ここで中心極限定理を 2 項分布に適用して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X - nT\hat{q}'}{\sqrt{nT\hat{q}'(1-\hat{q}')}} \le L_n\right) = \Phi(-d)$$

となる．ここで

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_c(\hat{j}^*; nT, \hat{q}') = 1 - \Phi(-d) = \phi(d)$$

を最終的にえる.（証明おわり）

演習 6． *(9.8), (9.9), (9.10)* についても自ら証明してみよ.（難しいかもしれない）

以上の準備のもとで，以下の Black–Scholes 公式を得る．

定理 3． 連続複利を考えた場合の無リスク *(*純*)* 利子率が r であるとき，株価 S が幾何ブラウン運動に従う場合のヨーロピアン・コールの価格とヨーロピアン・プットの価格は，それぞれ，

$$C(0,S) = S\Phi(d) - Ke^{-rT}\Phi(d - \sigma\sqrt{T}) \tag{9.11}$$

$$P(0,S) = Ke^{-rT}\Phi(-d + \sigma\sqrt{T}) - S\Phi(-d) \tag{9.12}$$

で与えられる．ここで

$$d = \frac{\log(S/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

である．

[証明] (9.5) と (9.6) に対して $n \longmapsto \infty$ として，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

に注意して，補助定理 1 を適用すれば，直接的に求まる.（証明おわり）