第4章　資産選択理論

4.1　はじめに

確率論の基礎を学ぶとき，確率論は金融商品の将来価格や収益率の不確実性を表現するために有効であることを指摘した．さらに，確率論によるアプローチは，金融資産のもつ危険を回避する手段を探す場合にも有用である．

1950 年代，後のノーベル経済学章受賞者となるマルコヴィッツによって考案された資産選択に関する平均・分散理論は，単純な枠組みながら資産選択における危険を明確に規定した上で，ある一定の収益率を保証する資産選択の中で，もっとも危険が小さくなる資産選択の性質を明確にした．

マルコヴィッツの考案した資産選択の考え方は，様々な方向に拡張されファイナンスにおける大きな研究分野を占めることになった．実は，この講義で扱うデリバティブの価格決定の理論もヘッジを基礎としているという意味で，デリバティブの需要者の資産選択理論を含んでいるともいえるのである．

さて，事前には収益率が確定しない様々な投資対象に直面するとき，投資家は投資対象が，当たれば得も大きいが外れれば損が大きいか，あるいは高い収益は見込めないが大損はしないかを考慮して，自分の資産を様々な投資対象に充て，もっとも望ましい資産を構成しようとするだろう．ここでは，資産選択の理論のごく初歩を，制約条件付きの最適値問題との関連で解説する．

以下では経済主体は自らの富が大きければ大きいほど満足が高いという状況を前提に話を進める．

4.2 不確実性の数学的表現

将来の富が不確実であることをどのように表現したらよいのだろうか．例えば，ある会社の株を所有すると，その会社が挙げた利益からの配当と，株の値上がりによる株価値上がり益 (capital gain) による富の増加が生ずると考えられる．しかし，会社の業績は将来にわたって不確実であり，１年後業績不振で配当はゼロ，さらに株価も急落という憂き目にあうかもしれいない．その一方で業績絶好調で配当も増加し，株価も急上昇で保有株式の価値は上がるかもしれない．

以上のような状況は，確率変数によって表現される．具体的には，将来の値（もしくは値のとる範囲）とそれが生起する確率を対にして考える．ある投資信託物件の税引き後の利回り R が，5 パーセント以上になる確率，3 パーセント以上になる確率，１パーセント以下になる確率等々を，考えることによって，投資信託の収益率の将来の変動を総合的に考慮するわけである．数学的には r を確率変数とみて，その分布関数 $F(x)$ あるいは確率密度関数 $f(x)$ を考える．ここで分布関数は

$$F(x) = Pr(R \leq x)$$

を表す．すでに学んだように確率密度関数は分布関数を微分したものである．あきらかに確率分布関数は 0 と 1 の間の値をとる単調非減少関数となる．

さらに，ある投資信託物件と別の資産対象の利回りは逆の動きを示す傾向があるかもしれない．逆に同じ動きを示す傾向があるかもしれない．例えば，ある投資信託物件の利回りは，米国債価格と非常に同じような動きをすることが過去の観察からわかっているとすると，二つの利回り R_A と R_B は互いに独立でない確率変数として表現される．

4.3　不確実性下の合理的行動

不確実性のない世界においては，人間の富の量という一次元の量に関して，多ければ多いほどよいと想定するのが自然であり，そのことに大抵の経済学者は異論は挟まない．数学的には，効用が富の増加関数であるとすればよい．そこに，選択の問題として困難な点は，ほとんどない．なぜなら可能な選択肢の中から，一番値の大きなものを選べばよいからである．

これに対して，不確実性のある世界では，4.2 節で書いたように富は，確率変数として表現される．つまり，ある富は選択肢として，平均値は大きいが，分散（あるいはその平方根である標準偏差）も大きく，最終的に得られる富の値のバラツキが大きいかもしれない．その場合，経

済主体はそうした富を持つことにリスク（危険）を感じるであろう．それに対し，平均値はそれほど大きくはないが，分散が小さな富を，経済主体はリスクがない，安定した選択対象と感じるかもしれない．そのように考えると，確率変数として表現される富を評価する基準が，この段階で示されていないことに気づく．

不確実性に関しては，実は経済学者がそれを扱いだす以前に，数学者が確率論の範囲で考えていた．しかし，経済学でも使える形の分析枠組みを提供したのはフォン・ノイマンである．彼はゲーム論の枠組みの中で不確実な選択基準を示した．具体的には，確率変数の集合の上に定義される選好関係[1]の上に，いくつかの公準を想定すると，必然的にそこでの望ましさは，効用の期待値の順番として表現されることを，数学的に証明した．

この期待効用理論は，不確実性を扱う多くの経済理論あるいはファイナンスの理論において，期待効用仮説として理論の前提としておかれる．ここでも，それにしたがう．つまり金融商品の不確実な，将来価格あるい収益率をあらわすと想定される確率変数 X と Y が与えられたとき，値に関して単調増加な効用関数 $u(\cdot)$ を考え，

$$E[u(X)] > E[u(Y)]$$

[1]選好関係は，ある対象ともう一つの対象のどちらが好ましいかをしめす二項関係として定義される．例えば A は B よりも選好されるなど．この選好関係が満たすべき性質として，様々な公準が考えられる．例えば,「A が B よりも，選好され，B が C よりも選好されるなら，A は B よりも選好される」という性質は推移律とよばれ，もっとも一般的に仮定される選好関係の性質である．

であるとき，またそのときに限って，X は Y よりも選好されると考えるのである．

注意 21. 効用の期待値 $E[u(X)]$ と，期待値の効用 $u(E[X])$ は異なるものであることに注意しよう．

この期待効用理論に基づく資産選択の一般理論の展開は，この章の最後で行なう．

注意 22. 期待効用理論によると，確率は将来事象に関する各主体の選好から構成されると考えられる．つまり，最初に各主体の起こりやすさに関する主観的判断ありきという立場である．よって，主体がもつ将来事象に関する確率判断は異なることを許容することになる．

この考え方は，長期的な観察に基づいて客観的な確率的な判断ができない場合にも確率論を応用することができる反面，主体間で異なる確率判断があるとき，市場における分析が難しくなる可能性がある．

以下では，次のように仮定する．

仮定 1. 市場に参加する投資主体の間で，将来事象に関する確率判断は共通である．

この仮定は，非常に強い仮定である．（主観確率論としての期待効用理論の利点を無視することになる仮定であるともいえる．）この仮定により，主体間の将来事象に関する選好の違いは，期待効用を計算する際の効用関数の形状の違いだけだと考えることができる．

4.4 資産選択の平均・分散アプローチ

マルコヴィッツは，すぐ前の節の期待効用仮説に加えて，限定的な想定をおくことで，金融資産選択の問題を扱いやすい形にすることができることを示した．それは，確率変数で示される富の期待値と分散にのみ期待効用が依存するという枠組みである．以下，それを解説する．

さて不確実な将来の富の額Wは，確率変数とする．$\bar{W} = E[W]$と表わす．効用関数$u(W)$を期待値$\bar{W}$の回りでテイラー展開をすると

$$u(w) = u(\bar{W}) + u'(\bar{W}) \cdot (w - \bar{W}) + \frac{1}{2}u''(\bar{W}) \cdot (w - \bar{W})^2 + R \tag{4.1}$$

Rは高位の項とまとめて記したものである[2]．これに確率変数Wを代入し，両辺の期待値をとると，

$$E[u(W)] = u(\bar{W}) + \frac{1}{2}u''(\bar{W}) \cdot Var(W) + E[R] \tag{4.2}$$

もし高位の項$E[R]$が無視し得るなら，将来富の望ましさは，期待値と分散$Var(W) = E[(W - \bar{W})^2]$に依存し，期待値が高いほど望ましく，$u''(\bar{W})$が負かゼロか正かに従って，分散が小さいほど望ましいか，関係ないか，分散が大きいほど望ましいかに，分類される．

マルコヴィッツは，$E[R]$の項が無視できる二つの可能性を考えた．

[2]これはWの項を含むという意味で確率変数である．

4.4.1　効用関数が二次式

将来富 W は期待値と分散が存在するような確率変数であるとする．それぞれを $\bar{W}$ と σ_W^2 と記す．効用関数が

$$u(w) = w - \frac{b}{2}w^2,\ b > 0$$

とする，このとき $0 \geq w \geq 1/b$ の範囲で，u は増加関数となる．これは明らかに $R = 0$ である．このとき

$$E[u(W)] = \bar{W} - \frac{b}{2}(\sigma_W^2 + \bar{W}^2)$$

で表わされる．

4.4.2　将来富の分布が正規分布

将来の富 W の確率分布が都合よく正規分布となるなら，将来の富 W の分布は期待値 $\bar{W}$ と分散 σ_W^2 のみによって定まる．このとき効用関数 $u(\cdot)$ を任意に与えたとき，期待効用は明らかに $\bar{W}$ と σ_W^2 の 2 つのパラメータだけに依存することに注意しよう．

今 $W \sim N(\bar{W}, \sigma_W^2)$ であるから，

$$z = \frac{W - \bar{W}}{\sigma_W}$$

とおくと，$z \sim N(0,1)$ であるから

$$E[u(W)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(\bar{W} + \sigma_W z)\phi(z)dz$$

と表わされる．ここで，$\phi(z)$ は標準正規分布の確率密度関数である．

このとき

$$\frac{\partial E[u(W)]}{\partial \bar{W}} = \int_{-\infty}^{\infty} u'(\bar{W} + \sigma_W z)\phi(z)dz$$

となり，若干面倒な部分積分の評価を通じて

$$\frac{\partial E[u(W)]}{\partial \sigma_W} = \int_{-\infty}^{\infty} u''(\bar{W} + \sigma_W z)\phi(z)dz$$

が言える．後者は，$u'' < 0$ のとき，マイナスの値をとる．以上により，経済主体にとって，富の期待値は望ましさの尺度，富の分散あるいは標準偏差は（避けるべき）リスクの尺度とみなせる．

4.4.3　ポートフォリオ理論の枠組み

以上の平均・分散アプローチを使って，複数の投資対象の収益率の期待値と分散・共分散が与えられているとき，望ましい資産選択についての性質を明らかにすることができる．

今投資対象が n 種類あるとしよう．現在 w_0 だけの価値の確定的な資産を持つ経済主体がそれらの投資対象にどれだけの金額を振り向けるかを考える．ここで，第 i 投資対象の粗収益率を R_i を記すことにする．これは，第 i 投資対象を 1 円所有していれば，将来元利合計で R_i 円にな

ることを意味する．[3]ただし，R_i は確率変数とする．二つの投資対象は互いに統計的に独立ではなく，片方が高いときにはもう一方も高くなる確率が高いという関係があるかもしれない．これは，二つの確率変数の共分散の大きさで測ることができる．収益率のベクトルをベクトルとして $\mathbf{R} = {}^t(R_1\ R_2\ \ldots\ R_n)$ と記す．収益率ベクトルの期待値を $\mu = {}^t(\mu_1\ \mu_2\ \ldots\ \mu_n)$ とし，分散共分散行列を V で表わす．V の ij 要素を σ_{ij} と書き，投資対象 i と投資対象 j の共分散を示す．つまり

$$\mu_i = E[R_i], \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{4.3}$$

$$\sigma_{ij} = Cov[R_i, R_j], \quad (i, j = 1, \cdots, n) \tag{4.4}$$

ポートフォリオとは，

$$w_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

を満たす n 次元ベクトル $\mathbf{y} = {}^t(y_1\ y_2\ \ldots\ y_n)$ のことを指す．ポートフォリオ $\mathbf{y} = {}^t(y_1\ y_2\ \ldots\ y_n)$ を選択すると，将来

$$\sum_{i=1}^{n} R_i y_i = {}^t\mathbf{y}\mathbf{R}$$

を得る．これは確率変数であることに注意しよう．資産の構成を変更すると，将来富が確率変数として様々に変化することがポイントである．

[3]つまり，ここでは粗収益率をあつかう．

今，w_0 を 1 として，1 円の資産を n 種類の金融商品に分割して保有することを考える．その保有額を $x_i, (i = 1, \cdots, n)$ と記すことにする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

になっている．その形態で保有される資産の粗収益率は，$\sum_{i=1}^{n} x_i R_i$ という n 個の確率変数の加重平均で表現された確率変数である．これの期待値は

$$E[\sum_{i=1}^{n} x_i R_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i E[R_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i$$

である．また，その分散は

$$
\begin{aligned}
Var[\sum_{i=1}^{n} x_i R_i] &= E[(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i - E[\sum_{i=1}^{n} x_i R_i])^2] \\
&= E[(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i)^2] \\
&= E[(\sum_{i=1}^{n} x_i (R_i - \mu_i))^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)] x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov[R_i, R_j] x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j
\end{aligned}
$$

注意 23. 収益率ベクトルの共分散行列は対称行列である．つまり

$$
{}^tV = V
$$

を満たす.

4.4.4　ポートフォリオ選択の考え方：平均分散分析

ポートフォリオ選択はマーコヴィッツによって，二段階に分けられたと考えるべきである．それは，

1. 期待収益を所与としたとき，分散あるいは標準偏差を最初にするポートフォリオを求める
2. 上の段階で求めたポートフォリオの中で，各経済主体は自分の選好にてらして最も好むものを選ぶ.

第一段階は，リスクの最小化は危険回避的な選好をもつどの経済主体にとっても望ましいと考えるためである．第二段階は，個人の危険への選好の度合によって定まる部分が大きい．普通，ポートフォリオ分析というとき，第一段階，つまりフロンティア・ポートフォリオの導出を指す.

さて，ポートフォリオの期待収益の値を $\bar{r}$ とするとき，フロンティア・ポートフォリオの導出は次の二次計画問題となる.

$$\text{minimize} \quad \frac{1}{2}{}^t\mathbf{y}V\mathbf{y} \tag{4.5}$$

$$\text{subject to} \quad {}^t\mathbf{y}\mu = \bar{r},\ {}^t\mathbf{y}\mathbf{1} = 1 \tag{4.6}$$

ここで $\mathbf{1} = {}^t(1\ 1\ \ldots\ 1)$ というすべての要素が 1 となる n 次元列ベクトルである.

注意 24. 制約式は，それぞれ

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\mu_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

を意味することに注意せよ．

　また目的関数は，y_i に関する 2次式となり，微分可能な関数であることに注意せよ．

　今，ラグランジュ関数を作ると

$$L(\mathbf{y}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}{}^t\mathbf{y}V\mathbf{y} + \lambda_1(\bar{r} - {}^t\mathbf{y}\mu) + \lambda_2(1 - {}^t\mathbf{y}\mathbf{1}) \tag{4.7}$$

必要条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial {}^t\mathbf{y}} = V\mathbf{y} - \lambda_1\mu - \lambda_2\mathbf{1} = {}^t\mathbf{0} \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \bar{r} - {}^t\mathbf{y}\mu = 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - {}^t\mathbf{y}\mathbf{1} = 0 \tag{4.10}$$

　(4.8) から

$$\mathbf{y} = \lambda_1 V^{-1}\mu + \lambda_2 V^{-1}\mathbf{1} \tag{4.11}$$

(4.11) に左から ${}^t\mu$ を掛け，${}^t\mathbf{y}\mu = \bar{r}$ を使うと

$$\bar{r} = \lambda_1{}^t\mu V^{-1}\mu + \lambda_2{}^t\mu V^{-1}\mathbf{1} \tag{4.12}$$

を得る．

　一方 (4.11) に左から ${}^t\mathbf{1}$ を掛け，${}^t\mathbf{y}\mathbf{1} = 1$ を使うと

$$1 = \lambda_1{}^t\mathbf{1}V^{-1}\mu + \lambda_2{}^t\mathbf{1}V^{-1}\mathbf{1} \tag{4.13}$$

(4.12) と (4.13) により，λ_1, λ_2 に関する

$$\begin{pmatrix} {}^t\mu V^{-1}\mu & {}^t\mu V^{-1}\mathbf{1} \\ {}^t\mathbf{1}V^{-1}\mu & {}^t\mathbf{1}V^{-1}\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

という 2 元連立方程式が得られる．係数行列の非対角要素は同じ値になっており，これらを

$$A = {}^t\mathbf{1}V^{-1}\mu$$

とする．また係数行列の左上の要素を

$$B = {}^t\mu V^{-1}\mu$$

右下の要素を

$$C = {}^t\mathbf{1}V^{-1}\mathbf{1}$$

書く．係数行列の行列式は

$$D = BC - A^2$$

である．

この連立方程式は，A, B, C, D と $\bar{r}$ を用いて

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r}C - A}{D}$$

$$\lambda_2 = \frac{B - \bar{r}A}{D}$$

のように解ける．これらを (4.11) に代入すると，最適なポートフォリオ $\mathbf{y}$ が

$$\mathbf{y} = \frac{\bar{r}C - A}{D}V^{-1}\mu + \frac{B - \bar{r}A}{D}V^{-1}\mathbf{1} \tag{4.15}$$

この式を$\bar{r}$に関して整理すると

$$\mathbf{y} = \mathbf{g} + \bar{r}\mathbf{h}$$

という$\bar{r}$に関する一次式になる．ここで

$$\mathbf{g} = \frac{B(V^{-1}\mathbf{1}) - A(V^{-1}\mu)}{D}, \quad \mathbf{h} = \frac{C(V^{-1}\mu) - A(V^{-1}\mathbf{1})}{D}$$

である．

最適ポートフォリオを求めるには，各$\bar{r}$の水準に対応する${}^t\mathbf{y}V\mathbf{y}$を計算すればよい．つまりある期待収益率水準をもたらすポートフォリオのうちリスクを最小にした場合の収益率の分散である．この分散を$\sigma_{\mathbf{y}}^2$と書くことにする．

$\mathbf{y}$は分かっているから，厄介な計算の後

$$\sigma_{\mathbf{y}}^2 = {}^t\mathbf{y}V\mathbf{y} = \frac{C\bar{r}^2 - 2A\bar{r} + B}{D} \tag{4.16}$$

を得る．

演習 15. $\sigma_{\mathbf{y}}^2$を導出せよ．

式(4.16)は$\sigma_{\mathbf{y}}^2 - \bar{r}$平面における放物線を表現している．

式(4.16)を

$$\frac{\sigma_{\mathbf{y}}^2}{1/C} - \frac{(\bar{r} - A/C)^2}{D/C^2} = 1 \tag{4.17}$$

と変形すれば，$\sigma_{\mathbf{y}}$を平方根として最適ポートフォリオの標準偏差とすると，$\sigma_{\mathbf{y}} - \bar{r}$平面では，双曲線となる．こ

の双曲線をポートフォリオ・フロンティアという．この双曲線の漸近線は

$$\bar{r} = A/C \pm \sqrt{D/C}\sigma_{\mathbf{y}}$$

となる．

リスクの指標である分散（あるいは標準偏差）を最小にするポートフォリオを MVP(minimum variance portfolio) という．これは，$\sigma_{\mathbf{y}} - \bar{r}$ 平面で点 $(\sqrt{1/C}, A/C)$ に対応するポートフォリオである．この点より上の双曲線部分 (有効ポートフォリオ・フロンティアとよぶ) に対応するポートフォリオは**有効ポートフォリオ**とよばれ，資産選択の対象となる．

演習 16. *MVP* より下の双曲線部分が資産選択の対象となりえない理由をのべよ．

4.5 最適ポートフォリオの性質

ここでは，前の節で求めたフロンティア・ポートフォリオの性質をまとめる．

命題 1. $\mathbf{g}$ と $\mathbf{g}+\mathbf{h}$ もフロンティア・ポートフォリオである．

これは $\mathbf{y} = \mathbf{g} + \bar{r}\mathbf{h}$ に注意すると，それぞれ $\bar{r} = 0$，$\bar{r} = 1$ に対応していることから明らか．

命題 2. 任意のフロンティア・ポートフォリオは，$\mathbf{g}$ と $\mathbf{g}+\mathbf{h}$ のアフィン結合で生成される．

これは，$\bar{r}_0$に対応するポートフォリオは

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{g} + \bar{r}_0\mathbf{h}$$

であるが，これは

$$y_0 = (1-\bar{r}_0)\mathbf{g} + \bar{r}_0(\mathbf{g}+\mathbf{h})$$

と書ける．よって命題は示された．

ここでの論法は，相異なる2つのフロンティア・ポートフォリオを考えても成立する．

命題 3. 任意のフロンティア・ポートフォリオは，相異なる二つのフロンティア・ポートフォリオのアフィン結合で生成される．

演習 17. なぜかを考えよ.（証明は容易である.）

演習 18. *2*つのフロンティア・ポートフォリオがあれば，それらが有効でなくても効率的ポートフォリオ・フロンティアが構成できることに注意せよ．

命題 4. *MVP*と異なる任意のポートフォリオと最小分散ポートフォリオ*MVP*の共分散は，*MVP*の分散に等しい．

MVPとは異なる任意のポートフォリオを，比率$\alpha : (1-\alpha)$で保有するポートフォリオを考える．(αは負でもよい．) MVPの分散をσ^2_{MVP}，もう一方のポートフォリオの分散をσ^2_0，共分散を$Cov(y_0, y_{MVP})$と書くことにすると，アフィン結合で作られたポートフォリオの分散は

$$\alpha^2\sigma_0^2 + 2\alpha(1-\alpha)Cov(y_0, y_{MVP}) + (1-\alpha)^2\sigma^2_{MVP}$$

と表される．これは $\alpha = 0$ のとき MVP の定義より最小になる．

よって上の式を α で微分してゼロとおいた α についての方程式が $\alpha = 0$ を解として持つ条件は，その方程式に $\alpha = 0$ を代入して得られた条件が我々の求める，

$$Cov(y_0, y_{MVP}) = \sigma^2_{MVP}$$

である．(証明おわり)

命題 5. フロンティア・ポートフォリオのアフィン結合はフロンティア・ポートフォリオである．また，有効ポートフォリオの凸結合は有効ポートフォリオである．

前半は，容易．後半は，有効ポートフォリオはその期待収益率が MVP の期待収益率 A/C を上回るフロンティア・ポートフォリオであることを考慮すれば簡単にわかる．

演習 19. 上の命題を証明せよ．

4.6 ポートフォリオ分割定理：安全資産 vs 危険資産

以上は，危険がゼロになることはないことを前提とした議論である．つまり，収益率の分散がゼロになるような投資対象はないと仮定して議論を展開してきた．マルコヴィッツの理論で興味深いのは，分散ゼロの安全資産とそれ以外の資産に関して資産選択の問題を考えるとポートフォリオ分割定理という資産選択に関するガイドラインが得られることである．

これには，これまでのn種類の危険な投資対象という枠組みに加えて，$n+1$番目の投資対象として危険がゼロで収益率がr_0で固定されているものを考える．

その場合，$n+1$種類の投資対象についての構成比の和が1となる．ポートフォリオの収益率は

$$r_0(1-\sum_{i=1}^{n} y_i)+\sum_{i=1}^{n} R_i y_i = r_0+\sum_{i=1}^{n}(R_i-r_0)y_i$$

であるから，期待収益率と分散はそれぞれ，

$$r_0+\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-r_0)y_i \tag{4.18}$$

$$^t\mathbf{y}V\mathbf{y} \tag{4.19}$$

最適問題は，

$$\text{minimize} \quad \frac{1}{2}{}^t\mathbf{y}V\mathbf{y} \tag{4.20}$$

$$\text{subject to} \quad ({}^t\mu - r_0{}^t\mathbf{1})\mathbf{y} = \bar{r}-r_0 \tag{4.21}$$

となる．

このとき，ラグランジュ乗数法から導かれる必要条件は，

$$V\mathbf{y}-\lambda(\mu-r_0\mathbf{1})=\mathbf{0} \tag{4.22}$$

$$({}^t\mu - r_0{}^t\mathbf{1})\mathbf{y} = \bar{r}-r_0 \tag{4.23}$$

(4.22)から

$$\mathbf{y}=\lambda V^{-1}(\mu-r_0\mathbf{1}) \tag{4.24}$$

を得る．これを，(4.23) に代入して λ について解くと

$$\lambda = \frac{\bar{r} - r_0}{{}^t(\mu - r_0\mathbf{1})V^{-1}(\mu - r_0\mathbf{1})} \tag{4.25}$$

となる．特に分母を F とおくと

$$F = {}^t(\mu - r_0\mathbf{1})V^{-1}(\mu - r_0\mathbf{1}) = B - 2r_0A + Cr_0^2$$

である．これで最終的なフロンティア・ポートフォリオの条件

$$\mathbf{y} = \left(\frac{\bar{r} - r_0}{F}\right)V^{-1}(\mu - r_0\mathbf{1}) \tag{4.26}$$

が得られる．このときポートフォリオ収益率の分散 σ^2 を求めると

$$\sigma^2 = \frac{(\bar{r} - r_0)^2}{F} \tag{4.27}$$

演習 20. 実際に，*(4.26)* から σ^2 を求めよ．

上の式を標準偏差に関する 2 本の直線をあらわすと考えると，$\sigma - \bar{r}$ 平面において，傾き $\pm\sqrt{F}$ の切片 r_0 半直線である．

いわゆるポートフォリオ分割定理が成立するのは，

$$r_0 < \frac{A}{C}$$

の場合である．この場合 4.4.4 節で示した MVP に対応する期待収益率が安全資産の収益率を上回っていることに注意しよう．

効率的ポートフォリオ・フロンティアは，実は上の場合標準偏差・平均平面において危険資産のみからなる効率的ポートフォリオフロンティアに対応する双曲線に対して接するように安全資産を示すポートフォリオから延ばした直線に対応している．

双曲線上の接点に対応するポートフォリオを**接点ポートフォリオ** (tangent portfolio) といい，安全資産を含まないことから，${}^t\mathbf{1}\mathbf{y} = 1$ より

$$\mathbf{y}^T = \frac{1}{A - r_0 C} V^{-1}(\mu - r_0\mathbf{1})$$

としてもとめられる．

すべての効率的ポートフォリオは，安全資産と接点ポートフォリオのアフィン結合によって複製できるから，そこに含まれる危険資産同士の割合は明らかに一定である．このことを**ポートフォリオ分割定理**が成立しているという．

4.7　資産選択の一般理論: 効用関数を特定しない場合

これまで，平均分散アプローチによる，資産選択理論をみてきた．平均分散アプローチは，資産収益変動の 3 次以上のモーメントが，期待効用に大きな影響を与えないということを前提にしていた．そのことにより，将来における資産の収益(率)変動に関する予想が，客観的(個人間に差がないということ)であるとき，個別主体の効用関数に無関係な最適な資産選択を求めることができた．ここ

では，効用関数に依存した形での最適資産選択の必要条件を求める．

さてここでは，$\mathbf{Z} = {}^t(Z_1\ Z_2\ \cdots\ Z_n)$ を将来の資産収益(つまり元利合計) をあらわす．これは確率変数ベクトルである．いま，決められた資産総額をある比率で，分散投資するものと考える．その比率を $x_i, (i = 1, \ldots, n)$ とする．これは

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

を満たす.

注意 25. $x_i < 0$ となる可能性を認めることもできる．その場合, 空売りを考えていることになる．空売りとは，*(*別資産を多めに購入するなどして*)* 自らがその資産に関して「売り手」のポジションをとることである.

4.7.1 最適資産選択の必要条件

以上の場合の資産選択問題は,

$$\text{maximize} \quad E[u({}^t\mathbf{y}\mathbf{Z})] \tag{4.28}$$

$$\text{subject to} \quad {}^t\mathbf{y}\mathbf{1} = 1 \tag{4.29}$$

これは

$$\text{maximize} \qquad E[u(\sum_{i=1}^{n} y_i Z_i)] \tag{4.30}$$

$$\text{subject to} \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \tag{4.31}$$

ということだから，ラグランジュ関数

$$L({}^t\mathbf{y}, \lambda) = E[u(\sum_{i=1}^{n} y_i Z_i) + \lambda(1 - \sum_{i=1}^{n} y_i)$$

を作って，ラグランジュ未定乗数法を適用すればよい．

ここで最適なポートフォリオ $\mathbf{y}^*$ のみたす必要条件は，制約条件以外に

$$E[u'(\sum_{i=1}^{n} y_i^* Z_i) Z_i] = \lambda, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.32}$$

である．

同様に，収益 r_0 の安全資産が存在する場合の資産選択問題の解も与えておこう．問題は

$$\text{maximize} \qquad E[u(\sum_{i=1}^{n} y_i Z_i + y_{n+1} r_0)] \tag{4.33}$$

$$\text{subject to} \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i + y_{n+1} = 1 \tag{4.34}$$

である．今度は制約条件を用いて y_{n+1} を消去することを

考えると問題は制約条件なしの

$$\text{maximize} \quad E[u(\sum_{i=1}^{n} y_i(Z_i - r_0) + r_0)]$$

となる．よって最適のための必要条件は

$$E[u'(\sum_{i=1}^{n} y_i^*(Z_i - r_0) + r_0)(Z_i - r_0)] = 0, (i = 1, \dots, n) \tag{4.35}$$

注意 26. この段階で，定性的に分かることは少ない．考慮している主体の効用関数に関して $u' > 0$ であるから *(4.35)* から各危険資産 Z_i について

$$P\{Z_i > r_0\} > 0$$

が保証される．

つまり，危険資産を前提に合理的主体が資産選択を行なうことが意味があるとき *(*必要条件がみたされるとき*)*，かならずハイリスク・ハイリターンの構造になっているということである．

4.8 ポートフォリオ集合の性質

これまで，個別主体の金融商品の選択行動を中心に扱ってきた．今度は，市場において様々な金融商品が取引されるとき，資産選択の対象は客観的にどこまで「絞られる」かを扱う．

4.8.1　ポートフォリオ：一般ケース

危険回避的で $u' > 0, u'' < 0$ となる効用関数 $u(\cdot)$ をもつ経済主体にとっての最適資産選択のための必要条件 (4.35) をみたすポートフォリオを仮に効率的とよぶことにする．(数学的に正確な定義は後に行なう．)

ポートフォリオとは，各資産の収益率をあらわす確率変数をベクトルと考えて，それらのアフィン結合で作られる確率変数を指す．

注意 27. これまで，危険資産（ならびに安全資産）が有限個の種類与えられたとき，それらを「ブレンド」する比率をポートフォリオとみなしたが，これからは確率変数そのものをポートフォリオとみなす．

さてファイナンスにおいて複製ポートフォリオという概念が，重要である．いくつかの金融資産を組み合わせて保有することが別の金融商品を保有することと，同じ収益特性を保証できるかどうかに焦点をあてる考え方である．

これまで通り n 個の確率変数 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ で表現された確率変数と，収益率 r_0 を保証する危険ゼロの安全資産が存在するという状況を考える．この場合ポートフォリオの集合は

$$\Pi_S = \left\{ Z \,\middle|\, (\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n) \left[\begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^{n} x_i Z_i + x_{n+1} r_0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \end{array} \right] \right\}$$

注意 28. 上で考えている n 個の確率変数 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ は，分析の出発点となる根源的な危険資産と考えておくとよい．

4.8.2 ポートフォリオの複製

ここで，問題となるのは n より少ない種類の金融資産を組み合わせることで Π_S の任意の要素を複製できるかということである．

注意 29. 一般に m の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ のアフィン結合の全体を

$$[X_1, X_2, \ldots, X_m]$$

と記すことにする．この記法を用いるなら

$$\Pi_S = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, r_0]$$

である．

注意 30. Π_S は，n 個の根源的な危険資産 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ を組み合わせて作られるポートフォリオの全体である．

今 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ というポートフォリオ (金融商品) のアフィン結合の全体が Π_S に一致したと仮定する[4]．このとき $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ の共分散行列のランクは m 以下である．もし m 以上であるとすると，複製できることに矛盾

[4]実は Π_S を含む集合としてよい．

する．さらに，$X_1, X_2, \ldots, X_m$ のアフィン結合 $\sum_{i=1}^n x_i Z_i$ の分散をゼロとすることができる．なぜなら Π_S には危険なしで r_0 の収益率を保証するポートフォリオを含むから，分散がゼロにできないとすると，再び複製ができるということに矛盾する．以上をまとめて，つぎの命題をえる．

命題 6. $m < n$ である m 個のポートフォリオ $X_1, X_2, \ldots, X_m$ が $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, r_0$ から生成される Π_S を複製する必要条件は，

1. $rank\, V \leq m$

2. $(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)\left[\begin{array}{l}\sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{かつ} \\ Var(\sum_{i=1}^n x_i X_i) = 0\end{array}\right]$

ここで，この文脈でいう無裁定条件を定義する．

定義 5.

$$\begin{array}{l}(\exists x_1) \\ (\exists x_2) \\ \vdots \\ (\exists x_n)\end{array}\left[\begin{array}{l}\sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{かつ} \\ Var(\sum_{i=1}^n x_i X_i) = 0\end{array}\right] \Longrightarrow E[\sum_{i=1}^n x_i X_i] \leq r_0$$

これは，もし危険ゼロのポートフォリオを危険資産だけから構成することができるならば，そのポートフォリオの期待収益率は r_0 を越えないことを意味する．

さて，次の命題が成立する．

命題 7. 無裁定条件が成立するとき,

$$Z_p = \sum_{i=1}^{M} a_j Z_j + b \Longrightarrow Z_p = r_0 + \sum_{i=1}^{M} a_j (Z_j - r_0)$$

[証明]

今 δ_p を任意の実数とする．さらに $\alpha_j = -\delta_p a_j$ とおく．このとき，各 Z_j の加重を α_j, Z_p への加重が δ_p，安全資産への加重が $1 - \delta_p - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ であるポートフォリオ Z^* を考える.（加重の和が 1 になっていることに注意.）

さて

$$\begin{aligned} Z^* &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_{\mathrm{J}} + \delta_p Z_p + (1 - \delta_p - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j) r_0 \\ &= -\delta_p \sum_{j=1}^{n} a_j Z_j + \delta_p (\sum_{j=1}^{n} a_j Z_j + b) + (1 - \delta_p - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j) r_0 \\ &= r_0 + \delta_p (b - r_0 (1 - \sum_{j=1}^{n} a_j)) \end{aligned}$$

であるが，右辺は定数になっているから，ポートフォリオ Z^* は危険ゼロの資産になっている.

ここで δ_p が任意の実数であることから，もし $b - r_0(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j)$ がゼロでないとすると，δ_p のとり方によっては Z^* は r_0 より大きな期待収益率をもつことになってしまう.

よって，無裁定条件より

$$b = r_0(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j)$$

がいえる．これをもともとの命題の前提に代入すると，命題の結論

$$Z_p = r_0 + \sum_{i=1}^{M} a_j(Z_j - r_0)$$

が得られる.（証明おわり）

注意 31. 無裁定条件を仮定するとき，もし

$$\Pi_S = [X_1, X_2, \ldots, X_M]$$

とすると，命題 *7* と命題 *6* によって，あるアフィン結合の加重によって r_0 は $X_1, X_2, \ldots, X_M$ から複製される．

よって，$X_1, X_2, \ldots, X_M$ のどれか（一般性を失うことなく X_M としてよい）は収益率 r_0 の安全資産そのものだと考えてよい．よって以下において，Π_S を生成することのできるポートフォリオの集合として常に

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_m, r_0\}$$

のようなものを考える．

上の注意から

命題 8. 無裁定条件が成立するとき,

$$\Pi_S = [X_1, X_2, \ldots, X_m, r_0]$$

であることの必要かつ十分条件は

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_0 \\ \vdots \\ r_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - r_0 \\ X_2 - r_0 \\ \vdots \\ X_m - r_0 \end{pmatrix}$$

を満たす $n \times m$ の係数行列が存在することである.

演習 21. 上の命題 *8* を証明せよ.

注意 32. 無裁定条件が成立するとき,

$$\Pi_S = [X_1, X_2, \ldots, X_m, r_0]$$

とすることができる m の最小数は $rank\, V$ である.

演習 22. 上の主張を確かめよ.

さてここで

仮定 2. 投資家の間で確率分布については意見の違いが存在しない.

という仮定をおく.

Π_S の基礎として $Z_1, \ldots, Z_n, r_0$ について (4.35) を成立させる単調増加な凹関数が存在するような「最適ポートフォ

リオ」

$$Z^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^*(Z_i - r_0) + r_0$$

の集合をΠ_Eと記し，効率的ポートフォリオの集合とよぶ.

注意 33.

$$\Pi_E \subset \Pi_S$$

今度のわれわれの目的はΠ_Eを特徴づけることである.

命題 9.

$$Z_e \in \Pi_E \text{ かつ } \delta > 0 \Longrightarrow \delta(Z_e - r_0) + r_0 \in \Pi_E$$

[証明]

$Z_e \in \Pi_E$とすると，ある単調増加な凹関数uが存在して

$$E[u'(Z_e)(Z_j - r_0)] = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

が成立する．$Z = \delta(Z_e - r_0) + r_0$と定義し，

$$v(W) = u(\frac{1}{\delta}W + \frac{(\delta-1)r_0}{\delta})$$

とすると，$\delta > 0$より，vも単調増加な凹関数である．さらに

$$v'(Z) = \frac{1}{\delta}u'(Z_e)$$

より

$$E[v'(Z)(Z_j - r_0)] = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

が成立する．よって $Z \in \Pi_E$.（証明おわり）

ここで平均分散分析における，接点ポートフォリオのように効率的ポートフォリオ・フロンティアが収益率 r_0 安全資産と危険資産 X にアフィン結合によって張られるとき，効率的ポートフォリオは

$$Z_e = \delta(X - r_0) + r_0$$

とかかれる．

注意 34. n 個の確率変数 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ の共分散行列が n で，根源的危険資産が *1* 次独立だとすると，いかなる効率的ポートフォリオも根源的危険資産の割合は，一定であるという意味で，ポートフォリオ分割定理と同じような状況が出現する．

命題 10. 効率的ポートフォリオ・フロンティアが収益率 r_0 安全資産と危険資産 X にアフィン結合によって張られるとき，Π_E は凸集合である．

証明は容易である．

演習 23. 上の命題を証明せよ．

4.8.3　市場ポートフォリオと効率的ポートフォリオ

これまでのところ，市場均衡条件としての無裁定条件の適用は一部であった．よって，均衡市場の存在を前提としたとき各主体が直面する効率ポートフォリオがどのような性質をもつかは，あまり扱ってこなかった．そこで，最後に市場と効率的ポートフォリオの関係について簡単にふれる．

定義 6．市場ポートフォリオとは，利用可能な証券をそれぞれの市場価値に比例するように組み込んだポートフォリオをいう．

注意 35． なお，主体 k のポートフォリオの組み入れ比率を

$$(y_1^k y_2^k \cdots y_p^k y_{r_0}^k)$$

とし，各主体の資産額を w^k とすると，

$$v_j = \sum_k y_j^k w^k, \quad (j = 1, 2, \ldots, p, r_0)$$

が第 j 証券の市場価値である．よって，市場ポートフォリオの組み入れ率は

$$\frac{v_j}{\sum_j v_j}$$

分母の総和に安全資産の市場価値も含まれていることに注意せよ．

命題 11. 投資家はすべて危険回避者であるとする．Π_Eが凸集合であるならば，市場ポートフォリオは効率的ポートフォリオである．

証明は簡単である．

注意 36. 投資家はすべて危険回避者であるならば，市場ポートフォリオの期待収益率はr_0を上回る．

次の命題は結果のみを示す．

命題 12. Π_Eが市場ポートフォリオZ_mとr_0のみによってアフィン結合で張られるならば，市場均衡における第j証券の期待収益は

$$E[Z_j] = r_0 + \beta_j(E[Z_m] - r_0)$$

のように書ける．ここで

$$\beta_j = \frac{Cov(Z_j, Z_m)}{Var(Z_m)}$$

である.（β_jを市場リスクの価格とよぶ.）