第2章　金利計算

2.1　はじめに

この章では，利子率の計算に関わる数理を概観する．

マクロ経済学の初級の講義において登場するIS-LM分析では利子率が，あたかもその世界に1つしかないかのように扱われる．そして，中央銀行の金融政策によって制御される利子率が生産者の投資行動に決定的な影響を与えると，学生は教わる．現実の世界をよく知るものには，抵抗を感ずることも多い．

第一に，金利と設備投資の関連は，教科書がいうように単純な関係にはない．正確には，設備投資を決定する要因として金利は，唯一無比といえる影響力をもっていない.（もし利子率が設備投資の第一の決定要因なら，この数年の低金利の状況では，企業の設備投資はとっくに回復していただろう.）第二に（まさにこれがこの講義に関連することだが），利子率には様々な種類があり，決定メカニズム自体も金融システムの高度化にともなって，複雑になっていると思われる．

2.2　金利とは

現在の1万円と将来の1万円は等価ではない．両者を関係づけるのが金利である．一般には，貸付取引によって，貸し手から借り手への資金の移動と借り手が貸し手に対して発行した貸借契約書の交換が現時点で行なわれ，将

来時点において利子を含めて返済・償還といった資金移動が借り手から貸し手に起こり決済が完了する．この場合，一定期間資金を利用することの対価が利子 (interest) であり，利子を元本で割った値に 100 をかけてパーセント表示したものを純利子率 (net rate of interest)，あるいは単純に利子率 (rate of interest) とよぶ．

$$\text{(純) 利子率} = \frac{\text{利子}}{\text{元本}} \times 100 \tag{2.1}$$

また，利子と元本の合計を元本で割った値をパーセント表示したものを粗利子率 (gross rate of interest) とよぶ．

$$\text{(粗) 利子率} = \frac{\text{利子＋元本}}{\text{元本}} \times 100 \tag{2.2}$$

数学的には粗利子率を扱うほうが便利な場合もあることに注意しよう．単位期間に対応する粗利子率がわかっているならば，複利計算で 1 単位資金のある期間後の元利合計を求める場合，その期間数だけ粗利子率を掛け合わせればよい．

注意 2. 実は，同質なりんご *1* 個を現在と将来で比較した場合，同じ満足を与えるとは限らないために，仮に両者を物々交換する市場があるならば，その交換比率は *1* にならないと予想される．これを時間選好という．その場合の交換比率は，*(*粗*)* 利子率とみられる．

2.3　収益率

この時点で，利子率について大して知ることはないと考える諸君もいるかもしれないが，話はそれほど単純ではない．なぜなら，現代の金融システムにおいては資金融通形態が複雑化しているために，1単位の資金が単位期間にどれだけの収益をもたらすかという観点に立たない限り，さまざまな金融商品の客観的な比較は難しい．つまり現代の金融においては，単純貸借における利子率に換わって，最終利回り (yield to maturity) あるいは収益率 (rate of return) という概念が重要となる．

まず，単純な貸借契約にも様々な期間が考えられるために，通常利子率はある一定の期間（たとえば1年）に基準化した形で表示されるのが普通である．この場合，基準化のやり方として単利計算によるものと複利計算によるものがある．1万円を n 年後に元利合計 $1+x$ 万円返済するという契約を考えよう．単利で収益率を計算する場合元本金額が契約期間中に不変であると想定して計算する．よって

$$\text{単利利回り} = \frac{x}{n} \times 100 \tag{2.3}$$

次に複利で計算する場合，各期末に収益率から計算される利子分が再投資されることで元本が変化すると想定して計算する．よって収益率 r は

$$(1+r)^n = 1+x$$

を満たすとして定義される．よって $r=\sqrt[n]{1+x}-1$ と計算される．

さらに契約期間中にクーポン支払いがある場合，収益率の計算は複雑になり一般にすぐ上のように解析的に単純に解くことができない．実際には，y 単位円の資金を借入するかわりに毎期末にクーポン c 円を貸し手に支払い，契約最終時点である第 n 期末にクーポン c 円と償還金 x 円を支払う，という貸借契約である．

この場合収益率を r とすると，r は次の方程式を満たすと考えられる．

$$y=\frac{c}{(1+r)}+\frac{c}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{c+x}{(1+r)^n}$$

この式の両辺に $(1+r)^n$ をかけて整理すると，粗収益率 $1+r$ は

$$y(1+r)^n-c(1+r)^{n-1}-c(1+r)^{n-2}-\cdots-(c+x)=0 \tag{2.4}$$

という代数方程式の解であるが，$n\geq 5$ の場合解析的にとくことができないことが知られている．よって数値計算によってしか収益率が求まらない．

注意 3. 実務の世界では，次の値を方程式 *(2.4)* を解いた結果として得られる収益率 r の近似解として利用される．

$$\frac{c+\dfrac{x-y}{n}}{y+\dfrac{n-1}{2n}\times(x-y)}$$

このような資金調達は一般に相対契約ではなく，債券市場においてクーポン債の発行によって行なわれる．毎期末にクーポン c 円を貸し手に支払い，契約最終時点である第 n 期末にクーポン c 円と償還金 x 円を支払うという有価証券であるクーポン債が y 円で市場で売買されるわけである．よって，このクーポン債の収益率 r と，観察される市場利子率が同一視される場面では，式(2.4)は実践的な意味を持つ．つまり市場利子率の変動に依存して債券価格 y が変化する．例えば $\frac{\partial y}{\partial r}$ あるいはその弾力性である $\frac{\partial y}{\partial r}\frac{r}{x}$ などは変化をあらわす典型的な指標である．

演習 1． クーポン債価格 y と利子率 r の依存性をあらわす，

$$\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

クーポン債価格 y とクーポン c の依存性をあらわす

$$\frac{\partial y}{\partial c}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial c^2}$$

の計算を試み，定性的な関係が確立できるか考えよ．

2.4　元利均等返済

典型的な金利計算の一種として住宅ローンのように，複利計算の下で毎期一定額ずつ返済する元利均等返済(amortization)を考えてみよう．次のような設定とする．借入金は y 円，金利を i，毎期 s 円ずつ返済するとして n 期で完済する．

借入時点で y 円の残存元本があるとして，最初の返済を行なうと 1 期後には返済対象となる残存元本は $y+iy-s$，さらに次の返済を行なうと 2 期後には残存元本は $(y+iy-s)+i(y+iy-s)-s=y+2iy+i^2y-2s-is$ である．これで残存元本が随時減少し n 期後に残存元本がちょうどゼロになればよい．

さて，第 k 回目の返済の対象となる残存元本を P_k であらわすとすると，第 k 回目の返済が済んだ後の残存元本 P_{k+1} と P_k には，

$$P_{k+1}=P_k+iP_k-s \tag{2.5}$$

という関係がある．これは定差方程式とみなせる．ただし，最初の設定から $P_0=y$ である．一般解は

$$P_k=y(1+i)^k-\frac{s\{(1+i)^k-1\}}{i}$$

として求められるから，完済の条件 $P_n=0$ を使うと，毎期の返済額が

$$c=\frac{iy}{1-(1+i)^{-n}} \tag{2.6}$$

として求まる．ここで

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

を amortization factor とよび，平均的な割引率と考える．

演習 2. 借入金 y と n 期間だけ毎期 s のキャッシュフロー続く割引現在価値が等しいとしても，s を求めることができる．試みよ．

2.5　割引関数と金利

これまで，時間の扱いは離散的であった．しかし，金利計算を行なう場合時間を連続的に扱うほうが数学的操作が簡単になる場合も多い．連続的に時間を扱う場合，貸借関係における状況を表現するために，割引関数を考えると都合がよい場合が多い．特に国債のように，貸し倒れが起きるかもしれないという信用リスク (credit risk) がないと一般に考えられる債券についての市場を考える場合には必須である[1].

これまで単純な貸借を，1円を借りて満期時点で元利合計を返済する契約を結ぶと考えてきた．ここでは発想をかえて，満期時点で1円の価値を保証する有価証券を市場で販売し，資金を調達する (借入する) ことを考える．このような有価証券を割引債 (discount bond) という．ある主体が割引債を購入後，満期時点まで転売せずもった場合，販売価格の逆数が粗利子率をあらわす．そこで，将来の T 時点において1円の償還が保証される割引債の t 時点の価格を $v(t,T)$ とあらわすことにする．ただし $t \leq T$ である．この関数は，将来の1円の価値を現在価値 (present

[1]民間企業の社債は一般に信用リスクが必ず存在する．

value) に割り戻すことに使えるために，割引関数 (discount function) とよばれる．

例 1. 既出のクーポン支払いのある場合の債券の価格を同様に $v_c(t,T)$ とあらわすことにすると，$\Delta t=(T-t)/n$ 期間とおけば

$$v_c(t,T)=\sum_{i=1}^{n} cv(t,t+\Delta t)+xv(t,T)$$

がクーポン債の価格と割引債の価格の関連を示すことになる．

2.6　連続複利とイールド

さて割引債が途中で再投資が認められないとして計算される単位時間あたりの利回りは，

$$r_1(t,T)=\frac{\frac{1}{v(t,T)}-1}{T-t} \tag{2.7}$$

となる．これを変形して

$$\frac{1}{v(t,T)}=1+(T-t)r_1(t,T)$$

単利の計算式と考えてよい．

つぎに，$T-t$ 期間中の中間点で元利合計が再投資された結果が割引債を 1 単位購入した場合の収益だと考えた場合の，単位時間当たりの利回り $r_2(t,T)$ は

$$\frac{1}{v(t,T)}=\left\{1+\frac{(T-t)r_2(t,T)}{2}\right\}^2$$

を満たす．同様に $T-t$ 期間中の n 等分されて時点で元利合計が再投資された結果が割引債を 1 単位購入した場合の収益だと考えた場合の，単位時間当たりの利回り $r_n(t,T)$ は

$$\frac{1}{v(t,T)} = \left\{1 + \frac{(T-t)r_n(t,T)}{n}\right\}^n \tag{2.8}$$

をみたす．これを両辺の逆数をとって

$$v(t,T) = \left\{1 + \frac{(T-t)r_n(t,T)}{n}\right\}^{-n} \tag{2.9}$$

とすると，話の都合がよい．

さて $n \to \infty$ として期間分割の数を限りなく大きくしていった場合の利回りは，指数関数の定義から得られる関係

$$e^{-x} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

と (2.9) から

$$y(t,T) = \lim_{n\to\infty} r_n(t,T) \tag{2.10}$$

のように考えて，

$$v(t,T) = e^{-(T-t)y(t,T)} \tag{2.11}$$

を得る．ここでの $y(t,T)$ を割引債に 1 円投資した場合の最終利回り，イールド (yield to maturity) とよぶ．イールドは平均利子率を表す．イールドを割引債価格であらわすことにすると，

$$y(t,T) = -\frac{\ln v(t,T)}{T-t}, \quad (T > t) \tag{2.12}$$

注意 4. イールド $y(t,T)$ を，t が固定された場合に T の関数としてみると，t 時点で購入可能な，さまざまな満期時点をもつ割引債の収益率の一覧を表すと考えることができる．

特に T を独立変数と考えて，様々な満期時点の割引債の収益率を対応させて描いたグラフをイールド・カーブという．これは，資金の運用期間と収益率の関係である金利の期間構造 *(term structure)* を表現しているという言い方をすることがある．

現実に観察されるイールド・カーブの形状は，上方に対して頭打ちになる増加関数であることが多い．しかし，理論的にはイールド・カーブはさまざまな形状を取りうる．

演習 3. 式 *(2.13)* を参考にして，イールド・カーブが，

1. 水平になる条件
2. 右上がりになる条件
3. 右下がりになる条件
4. 山型になる条件

をそれぞれ考えてみよ．（確定的な答えを出すのは，難しいかもしれないので，まず具体例で考えてみよ．）

2.7　スポットレート

イールドは有限満期の割引債の平均利子率というべきものであった．それでは，$T \to t$として満期までの期間をゼロに近づけていった値には何か意味があるだろうか．

数学的には(2.13)から

$$r(t) = -\lim_{T \to t} \frac{\ln v(t,T)}{T-t} = -\frac{\partial}{\partial T} \ln v(t,T)\bigg|_{T=t} \qquad (2.13)$$

と表現されるものである．これをスポットレート(spot rate)とよぶ．

スポットレートは，無リスクで運用できる短期資産の利子率であると考えられる．それゆえ1円をtからTまで連続複利で運用した元利合計

$$e^{\int_t^T r(\tau)d\tau}$$

を無リスク預金と考えることができる．

注意 5. 現実には，満期の比較的短い国債（あるいはそれに準ずる資産）の金利をもって，スポットレートとみなす．また無リスク預金といっても，現実にデフォルトの危険のない銀行はないために，単純に銀行預金とみなすことはできないことにも注意しよう．

なおスポットレートは，デリバティブの価格を扱う場合に決定的に重要な役割をはたす．

2.8 フォワードレート

つぎに，$t < T < \tau$として，将来時点Tからさらなる将来時点τまでの利回りを

$$f(t,T,\tau) = -\frac{\ln \frac{v(t,\tau)}{v(t,T)}}{\tau - T} \tag{2.14}$$

と定義して，フォワード・イールドとよぶ．フォワード・イールドは割引債の先渡市場における利回りと考えることができる．

ここで，イールドからスポットレートを導いたのと同様に，$\tau \to T$とおいて

$$\begin{aligned} f(t,T) &= -\lim_{h\to 0} \frac{\ln v(t,T+h) - \ln v(t,T)}{h} \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} \ln v(t,T) \end{aligned}$$

をフォワードレートいう．

注意 6. すぐ上の式から

$$v(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$$

が成立するが，フォワードレートも市場で実際に取引される金融資産の金利でない．つまり割引債価格を厳密に知るためには将来におけるスポットレートの動向を知る必要があるが，先渡市場・先物市場の様々な金利から近似的にしか割引債の価格決定を取り扱うことができない．

さらに金利変動に関する不確実性がない場合には,

$$r(T) = f(t, T)$$

が任意の時点Tで成立するが，そのときに限って割引債による資金運用の元利合計が，無リスク預金とみなされる.

演習 4. 上の注意の中の最後の主張を確認せよ.

演習 5.

$$y(t, T) = \frac{\int_t^T f(t, s)ds}{T - t}$$

が成立することを示せ．これにより，イールドとはフォワードレートの平均であることがわかる.

2.9　おわりに

以上，金利計算と称してファイナンスにおける中心概念である収益率と金融商品がどのように関連するかを，不確実性が存在しない世界で考えた．実は，明示的に示さなかったがこれまでのところに，無リスク・無費用で設ける機会は存在しないという「無裁定」の考え方がすでにいくつかの場面で登場している.

無裁定価格理論は現代ファイナンスにおいて中心となる考え方である．特に金融商品(金融資産）の時間的変動を確率的変動として捉えて，複数の金融商品の間で裁定機会を排除することで金融商品間の価格の関係が確定する.

次章で，リスクを含む資産を取り扱う準備として，離散的確率論を学ぶ.