Chapter 2

数学の準備：線形代数と微分積分の復習、その他

2.1 ベクトル、行列と行列式

2.1.1 ベクトル

ベクトルを「大きさと方向を持った量」などと、禅問答のような定義をはじめからすると混乱する。そうした定義が「体感」できるのは、実は抽象的な定義を学習し、例や定理などによってベクトルのさまざまな性質が理解できてからである。正確に理解するためには、地道な学習は避けて通ることができない。

さて、ベクトルの概念を理解するには二通りの接近法がある。ひとつは、ベクトルの実例として、有限次元実ベクトル空間に関心を限って、直感が働きやすい形でベクトルの概念を教えこむもの。もうひとつは、いわゆる公理的接近というもので、ベクトルの概念を極度に抽象化された形で定式化した上で、ベクトルの持つ論理的性質のみに注目して、さまざまな実例を示しながら教えこむもの。

どちらの接近法がよいかは、個人差もあり一概には結論を出せない。しかし、抽象的な数学の訓練をあまりうけていない経済学部の学生には、直感の働く前者の接近法が望ましいと判断した。そこで、以下においては有限次元実ベクトル空間に関心を限って説明を行う。

ベクトルの定義

例えば3,2,0,-4を順番通りにならべて、コンマで区切り、括弧で括った

$$(3,\ 2,\ 0,\ -4)$$

のようなものをベクトルとよぶ。もちろん括弧でくくられる実数の個数は、４つでなくても、５つでも、一つでも、百個でもかまわない。一般にはnを自然数としてn個の組である。でこれは、実数のn組と呼ぶものである。[1]

一般にnを自然数としてn個の実数$x_1, x_2, \cdots, x_n$を並べた

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

をn**次元ベクトル**とよび、n次元ベクトルの集合をn**次元ベクトル空間**とよぶ。

また、n組のi番目の要素を第i要素とよぶ。

例 1

$$(0)$$

例 2

$$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$$

例 3

$$(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3})$$

はそれぞれ、1次元、5次元、3次元の実ベクトルの例である。

[1] 学習が進むにつれて、諸君はわかる思うが、実数のn組がベクトルそのものであるという関係なのではなく、実数のn組はベクトルとも理解できるという関係にある。

ベクトル空間上の演算

これだけでは、何もならない。このように定義したベクトルの集まりに対して、実数に対する四則演算と類似した、いくつか演算が定義できる。実は、こうした演算の性質を理解することが、ベクトルを理解するということなのである。

まず最初に**加算**とよばれる演算である。これは、二つのベクトルに対して、一つのベクトルを対応させる規則であり、つぎのように定義される。

$$(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n) + (y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_n) = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \cdots,\, x_n + y_n)$$

これは、

$$+\ :\ ((x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n), (y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_n))\ \longmapsto (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \cdots,\, x_n + y_n)$$

という写像を考えていることを意味する。具体的には、第i要素同士を加えるという操作である。学生諸君は、定義式の左辺の+記号と右辺の+とは本来異なるものであることに注意すべきである。

つぎに、一つの実数αと一つのベクトルに対して、一つのベクトルを対応させる**スカラー乗算**とよばれる演算があり、つぎのように定義される。

$$\alpha\ (x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n) = (\alpha x_1,\, \alpha x_2,\, \cdots,\, \alpha x_n)$$

これは、

$$(\alpha, (x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n))\ \longmapsto (\alpha x_1,\, \alpha x_2,\, \cdots,\, \alpha x_n)$$

という写像を考えていることを意味する。具体的には、各要素をα倍する操作である。

以上二つの演算を定義した。これらは、非常に「自然」に感じられるため、なにをいまさらと感じる学生諸君もいるかもしれない。しかし、この段階では、上の演算規則はさまざまな演算の可能性から決めたものであると、認識する態度が重要である。例えば、2次元ベクトル$(a,\, b)$と$(c,\, d)$に対して、

$$(a,\, b) \diamond (c,\, d) = (ac - bd,\, ad + bc)$$

という2項演算が定義できる。これが、不自然かというと。そうではなく、逆に数学において非常に基本的な演算といってもよい。種を明かせば、この演算は複素数の積にほかならない。

例 4 (3,2,1) + (0,-3,4) = (3,-1,5)

例 5 (1,3,5,7) + (-1,-3,-5,-7) = (0,0,0,0)

以上ベクトルに関する基本的な演算が定義された。これから、ベクトルを表記するとき、要素を$(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)$のように具体的に書かずに、$\mathbf{x}$のように単一の文字で示すこともある。[2]

さて以上の二つの演算は、次に上げる性質を満足する。ここで、$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$は任意のベクトル、$\alpha, \beta$は任意の実数をあらわすこととする。

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} \tag{2.1}$$

[2] なお、**減算**は加法同様、二つのベクトルに対して、一つのベクトルを対応させる規則として、つぎのように定義できる。

$$(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n) - (y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_n) = (x_1 - y_1,\, x_2 - y_2,\, \cdots,\, x_n - y_n)$$

これは、

$$-\ :\ ((x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n), (y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_n))\ \longmapsto (x_1 - y_1,\, x_2 - y_2,\, \cdots,\, x_n - y_n)$$

という写像を考えていることを意味する。具体的には、第i要素同士の減算をとるという操作である。しかし、実際には、減算は

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}$$

と考え、加算から導かれるものであるとするほうがすっきりしている。

$$\exists !0 \ : \ \mathbf{x} + 0 = 0 + \mathbf{x} \tag{2.2}$$

$$\forall x \exists (-x) \ : \ \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0 \tag{2.3}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \tag{2.4}$$

$$\alpha(\beta \mathbf{x}) = \beta(\alpha \mathbf{x}) \tag{2.5}$$

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{2.6}$$

$$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}) \tag{2.7}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x} \tag{2.8}$$

演習 1 以上の８つの規則が常に成立することを、ベクトルの演算の定義にもどって確認せよ。実数の四則演算についてのさまざまな性質は所与とすること。

注意 1 実は、これらの性質を満たす演算を持つ集合をベクトル空間とよび、その元をベクトルと定義するのが現代的な数学の立場なのである。その立場にたつなら、我々の定義の実数の n 組の集合であるベクトル空間は、数あるベクトル空間の１例にすぎないということになる。

なお、ベクトル空間を考えるとき部分空間というものを考えることがある。これは、ベクトル空間の部分集合のうちあるものはそれ自身ベクトル空間とみなせるものがある。

定義 1 いま X をベクトル空間とする。つぎの２つの性質を満たす X の部分集合 Y を部分空間とよぶ。

$$\begin{aligned} x \in Y \ \& \ y \in Y \quad &\Longrightarrow \quad x + y \in Y \\ x \in Y \ \& \ \lambda \in \mathbf{R} \quad &\Longrightarrow \quad \lambda x \in Y \end{aligned}$$

例 6 集合 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 2y\}$ は、$\mathbf{R}^2$ の部分空間である。（各自確認せよ。）

一次独立と基底

この段階でベクトルについて考えなくてはならない重要な性質は、一次独立性である。いま X をベクトル空間とする。$x_1, x_2, \ldots, x_k$ を X の k 個の点とする。又、$a_1, a_2, \ldots, a_k$ はそれぞれ実数であるとする。このとき

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j$$

を線形結合とよぶ。

一次独立性とは、X の有限な部分集合 $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ の性質として定義される。

定義 2 $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ が一次独立であるとは、

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j = 0 \implies \forall j \ a_j = 0$$

が成立することである。

注意 2 一次独立が成立しないとき、一次従属という。

さて基底は、線形結合によって定義される X の部分集合である。

定義 3 Xの部分集合は、Xの任意の点がその部分集合の有限個の点の線形結合として表現できるとき、またその部分集合の任意の真部分集合についてすぐ上の性質が満たされないとき、基底であるという。

注意 3 言い換えるなら、基底とはXをその線形結合で表現し尽くすことのできる一次独立な集合の内、最小のものである。

演習 2 基底が一次独立であることを示せ。また、基底によるXの点の線形結合による表現が一意であることを示せ。

2.1.2 内積と距離

まず、内積を定義する。内積はベクトル空間について定義される演算である。

定義 4 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$と$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$のの内積は

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

である。

この内積という演算は、次の性質を満たす。

$$\begin{aligned} x \cdot y \quad &= \quad y \cdot x \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad &: \quad : (\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z) \\ x \cdot x \geq 0 \quad &\text{and} \quad x \cdot x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

内積を用いて、ベクトル空間X上の２点の４間の距離を定義することができる。$x, y \in X$とする。この２点の距離$d(x, y)$を

$$d(x, y) = [(x - y) \cdot (x - y)]^{\frac{1}{2}}$$

この距離は、以下の性質を満たす。

$$\begin{aligned} d(x, y) \quad &= \quad 0 \Longleftrightarrow x = y \\ d(z, x) \quad &\leq \quad d(x, y) + d(y, z) \\ d(x, y) \quad &\geq \quad 0 \\ d(x, y) \quad &= \quad d(y, x) \end{aligned}$$

内積を用いて定義される重要な概念に直交性がある。これは、二つのベクトルについて定義される。

定義 5 二つのベクトルxとyは、

$$x \cdot y = 0$$

を満たすとき、直交するといわれる。

また、内積を用いて二つのベクトルのなす角度を定義することができる。具体的には二つのベクトルxとyのなす角度θは、

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{\sqrt{(x \cdot x)(y \cdot y)}}$$

によって定義される。

注意 4 これにより、二つのベクトルが直交することは、二つのベクトルが直角の関係にあることがわかる。

演習 3 上の性質が成立することを示せ。

2.1.3 行列と行列式

行列の基礎

行列とは、次のように数を長方形に並べたものである。

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0.5 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より一般的には、

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

である。

横方方向へ１本とりだしたものを行、縦方向への１本とりだしたものを列という。行の大きさと列の大きさによって、行列のタイプを規定する。例えば、上の例では２×２行列、１×３行列、２×４行列、m×n行列という具合である。行と列の大きさが等しいものを正方行列という。また、行列内の一つの数字を要素といい、その位置によって第(i,j)要素といったりする。さらに、正方行列のうち対角線上の要素以外はゼロであるものを、対角行列いう。対角行列のなかでも、対角要素がすべて1であるものを単位行列とよび区別する。これにIという記号を用いたりする。また、正方行列のうち$a_{ij}=a_{ji}$が成立するものを対称行列という。対角行列の上（下）側の要素以外がゼロである正方行列を上（下）三角行列という。

さきほどの、Aについて転置行列A'（あるいはA^Tと書いたりする）を定義することができるこれは、

$$A' = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

である。

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0.5 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \\ 0.5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

注意 5 行列は、縦方向に並べたベクトル（列ベクトルという）が横にならんだものと考えることもできるし、横方向に並べたベクトル（行ベクトルという）が縦にならんだものと考えることもできる。

行列の基本演算

$A=(a_{ij})$と$B=(b_{ij})$を考え、二つの行と列の大きさは等しいとする。まず、二つの行列が等しいための必要十分条件を定義しておく。それは、すべての要素が等しいこと、$\forall i,j\ a_{ij}=b_{ij}$である。以下、$A$はm×n行列とする。

以下の演算が定義される。

$$A + B := (a_{ij}) + (b_{ij})$$

$$A - B := (a_{ij}) - (b_{ij})$$

さらに、任意の実数λに対して

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})$$

次にn×r行列$C = (c_{jk})$を考え、Aとの積を定義する。

$$AC = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)$$

注意 6 ACは定義されるが、CAは$m = r$でない限り定義されない。
また、ACとCAが定義され、サイズが同じであっても二つは相等しいとは限らない。

以下、それぞれの演算が定義できた場合の各演算の性質である。

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(AB)' = B'A'$$

$$AI = IA = A$$

AA', $A'A$はともに対称行列である。

定義 6 Aが正方行列とするとき、

$$AB = I$$

となる行列Bがあるとき、これをAの逆行列とよび、A^{-1}と記す。

逆行列をもつ正方行列を正則行列という。つぎの定理は、正則ということとベクトルの階数が関係していることを示す。

定理 1 正方行列Aは、各列をベクトルとみなしたとき、一次独立になっているとき、またそのときに限って正則である。

2.1.4 行列式

行列式とは、一つの正方行列に対して、一つの数を対応させる関数である。諸君は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

という行列に対する行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

の値が-2であることがわかる。
まず行列式を定義するまえに、次の言葉を定義しておく。

定義 7 $n(\geq 2)$ 変数、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の関数は、それぞれの変数について線形であるとき、つまり

$$f(x_1, \ldots, x_k + x'_k, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n)$$

と

$$f(x_1, \ldots, \lambda x_k, \ldots, x_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$$

が成立するとき、多重一次形式といわれる。

これを使って行列式を以下のように定義する。

定義 8 n 次正方行列 A を n 次元列ベクトル A_j が、n 個並んでいると考えて、

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

として、行列式 $\det$ を以下の条件を満たす関数と考える。

$$\det A = \det(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

は多重一次形式。

$$\exists j \exists k : \ (A_j = A_k \quad and \quad j \neq k) \Longrightarrow \det A = 0$$

$$\det I = 1$$

このように定義した行列式は次の定理を満たす。

定理 2 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\det A = \sum_{\sigma} sgn \sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

ここで、σ は添え字 $(1, 2, \ldots, n)$ の置換を表わし、総和はすべての置換について行う。[3]

四次以上の行列の行列式を計算するのは一般に厄介である。行列式は余因子というものを考えてやることによって、次数の低い行列式を用いて表現することができる。

定義 9 n 次正方行列 A の第 i 行と j 列を除いて得られる $n-1$ 正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを、行列 A の (i, j) 余因子という。A_{ij} と書いたりする。

定理 3 n 次正方行列 A について、次の性質が成り立つ。

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \tag{2.9}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \tag{2.10}$$

定理 4

$$A \ : \ \text{正則} \Longleftrightarrow \det A \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

[3] 置換は、$\{1, 2, \ldots, n\}$ の上の全単射であると考えるとよい。また、すべての置換は互換の積（合成）あらわすことができる。このとき、互換を偶数回作用するか奇数回作用するかで、$sgn\sigma$ が 1 か -1 の値をとる。

2.2 微分

ここでは偏微分の計算など技術的な事項を整理する。

定義 10 XをR^nの開集合とし、$x^\circ \in X$とする。$f : X \to R$は、次の条件を満たすベクトルaが存在するとき、点x°で微分可能であるという。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^\circ + h) - f(x^\circ) - a \cdot h}{||h||}$$

=0 上のベクトルaを$f'(x^\circ)$と書き、x°の微分という。

注意 7 上で出てくるhはn次元ベクトルである。

注意 8 $f'(x^\circ)$を写像とみるとき、これを導関数という。

すぐ上で定義した微分は、一次元の場合の素直な拡張になっているが、実際にどんなものかを定義から直接見出すのは厄介である。しかし、偏微分と微分を関係づける定理があるため、我々は多くの場合多変数の場合も微分を機械的に計算することができる。

定義 11 XをR^nの開集合とし、$x^\circ \in X$とする。$f : X \to R$は、次の条件を満たす実数a_iが存在するとき、点x°で偏微分可能であるという。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^\circ + e_i h) - f(x^\circ) - a_i h}{h}$$

=0 上の実数a_iを

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^\circ)$$

と書いて、x°の偏微分という。ただし、hは実数、e_iは第i要素のみ1でそれ以外0である単位ベクトルとする。

定理 5 XをR^nの開集合とし、$x^\circ \in X$とする。$f : X \to R$が$x^\circ \in X$で微分可能であるとき、fは連続でかつ、

$$f'(x^\circ) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^\circ),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^\circ),\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^\circ), \right)$$

が成立する。

注意 9 導関数が連続であるとき、微分可能性と偏微分の存在は同値となる。

$f : X \to R^m$を考えるとき、微分の定義においてベクトルaは$m \times n$行列Aに修正される。また、偏導関数も同様に定義される。微分が、偏微分を使って、

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^\circ) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^\circ) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^\circ) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^\circ) \end{pmatrix}$$

と表現される。ここで、

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$$

と考えている。なお、上の行列をヤコビ行列とよぶ。

合成関数の微分則を多変数の場合に拡張することができる。合成関数の微分則とは、$f(y)=e^y$、$g(x)=3x^2+x$であるとき、$f(g(x))=\log(3x^2+x)$のxに関する微分が、$f'(g(x))\cdot g'(x)=e^{g(x)}(6x+1)=e^{3x^2+x}(6x+1)$になることである。

今、$f:X\to R^m$、$g:Y\to R^k$、XはR^nの開集合、YはR^mの開集合とする。$h:X\to R^k$を$h(x)=g(f(x))$と定義する。このとき、スカラー関数の場合同様、hの微分は$g'(f(x))$と書ける。

例 7 $n=k=1$、$m>1$のときを考える。このとき、

$$h'(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x}$$

である。

$y=f(x)$が$f(x)=a+bx$であるとき、$b\neq 0$であるならfの逆関数が存在し、$f^{-1}(y)=-\frac{a}{b}+\frac{1}{b}y$と書ける。これを多変数の場合に拡張することができる。これを逆関数定理という。

定理 6 $f:X\to R^n$をR^nの開集合XからR^nへの微分可能な写像とする。ここで、fのヤコビ行列がある点$x^*\in X$において正則であるならば、x^*の近傍において、微分可能な写像ϕが存在して、

$$\phi(f(x))=x$$

を満たす。

この定理から、陰関数定理が得られる。

定理 7 $f:D\to R^n$を$R^n\times R^m$の開集合DからR^nへの微分可能な写像とする。ここで、$(x^*,z^*)\in D$とする。fのxに関するヤコビ行列がある点(x^*,z^*)において正則であるならば、微分可能な写像ϕが存在して、

$$\phi(z^*)=x^*$$

$$f(\phi(z),z)$$

を満たす。

この陰関数定理は、解析的に比較静学を行う場合の理論的基礎となる。具体的には、

例 8 f_iを第i財の超過需要関数とし、

$$f_i(p_1,\ldots,p_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=0$$

が各$i=1,\ldots,n$に対して成立することが均衡条件である。このとき、パラメタ$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$の変化に対して、上の均衡条件をみたす$p_1^*,\ldots,p_n^*$がどう変換するかを調べることは、$\alpha=\alpha_1,\ldots,\alpha_m$の関数$p=\phi(\alpha)$の性質を調べることに等しい。この、$\phi$の存在を保証するのが陰関数定理である。

2.3 凸集合・凹関数

最適化問題では、凸集合や凹関数がしばしば重要な役割を果たす。それは、最適解の存在や、一意性などを調べるために、そうした性質を仮定せざるをえないためである。ここでは、凸集合や凹関数の定義・性質をまとめておく。

2.3.1 凸集合

凸集合は、突出した部分がない集合として直感的にイメージできる。このイメージを数学的に厳密に定義してみよう。簡単化のために、以下に登場する集合Xは有限次元ユークリッド空間R^mの部分集合とする。

定義 12 Xの２つの点x, yをとり、$0 \leq \lambda \leq 1$である実数λを一つ定める。このとき、

$$\lambda x + (1 - \lambda)y$$

で表される点の集合を、x, yの凸結合という。

凸結合とは、２点を結ぶ線分そのものである。

定義 13 集合Xは、そこに含まれる任意の２点から作られる凸結合が、Xに含まれるとき凸集合とよばれる。

例 9 以下の集合は凸集合である。

- R^m自身
- 開単位球$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
- 単体$\{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

例 10 以下の集合は凸集合ではない。

- 「凸」という字を平面上の集合とみなしたもの。
- 球面$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- $\{(x, y) \mid xy > 0\}$

演習 4 各自、興味深い凸集合を考えよ。その場合、閉集合とならないもの、有界集合とならないものなども考えよ。

ここで、後々のために集合の和を定義しておく。（和が定義できるのは、ユークリッド空間のような空間の部分集合である。）

定義 14 R^mの部分集合X、Yに対して

$$\{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

で定義される集合を、XとYの和とよび、$X + Y$で表す。

つぎの重要な命題が成立する。

命題 1 R^mの部分集合X、Yがともに、凸集合であるとき、$X + Y$も凸集合である。

演習 5 上の命題を証明せよ。

2.3.2 凹関数

まず、凸関数を定義する。（凸関数のほうが、数学的には馴染み深く、凹関数は凸関数から簡単に定義されるからである。）

定義 15 凸集合Xを定義域とする関数fは、任意の２点$x \in X$、$y \in X$、$0 \leq \lambda \leq 1$である任意の実数λに対して、

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

が成立するとき、凸関数とよばれる。

定義 16 凸集合Xを定義域とする関数fは、$-f$が凸関数であるとき、凹関数とよばれる。

つぎの命題が成立する。

命題 2 凸集合Xを定義域とする関数fは、次のように定義されるR^{m+1}次元の部分集合

$$\{(x,a) \mid f(x) \leq a\}$$

が凸集合であるとき、またそのときに限り凸関数となる。

注意 10

$$\{(x,a) \mid f(x) \leq a\}$$

をfのエピグラフ、

$$\{(x,a) \mid f(x) \geq a\}$$

をfのハイポグラフとよび、それぞれepi f,hypo fと記す。

つぎの命題が容易に得られる。

命題 3 凸関数の和は、凸関数。凹関数の和は凹関数。

[証明]fとgの両方が凸としてみる。xとyは共通の定義域に存在するとしよう。また、$0 \leq \lambda \leq 1$とする

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ &= \lambda(f(x)+g(x)) + (1-\lambda)(f(y)+g(y)) \\ &= \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)\end{aligned}$$

である。（凹関数についても同様）

例 11

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f(x) = \begin{cases} x & if \;\; x \geq 0 \\ -x & otherwise \end{cases}$$

などは、凸関数の例である。

注意 11 線形関数は凹関数でありかつ凸関数でもある。

演習 6 凹関数の例を見つけよ。

さて、$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$は定義域を正象限とすると、凹関数である。この関数の等高線を描くと、原点に対して凸になっている。これは、一般の凹関数について言える。

では、凹関数とは等高線が原点に対して凸になっている関数だろうか。実はそうではない。それを次の小節で扱う。

2.3.3 準凹関数

実は、等高線が原点に対して凸になっている関数を準凹関数といい、次のように定義する。

定義 17 関数fは、定義域の任意の２点x, y、$0 \leq \lambda \leq 1$である実数λに対して

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(\min(x, y))$$

であるとき、準凹関数という。

次のように定義を言い換えてもよい。

定義 18 関数fは、定義域の任意の点x、任意の実数aに対して集合

$$\{x \mid f(x) \geq a\}$$

が凸集合であるとき、準凹関数という。

演習 7 凹関数は準凹関数であることを証明せよ。

注意 12 準凹関数は凹関数であるは限らない。反例として

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & if \;\; x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

をあげておく。この関数は凸関数である。

注意 13 準凹関数は、原点に対して凸な関数であることを厳密に数学で定義したものである。すると、

$$u(x, y) = x^3 y^4$$

のような関数は、準凹関数であるが凸関数である。実際、これを効用関数と考えると限界効用$\frac{\partial u}{\partial x}$と$\frac{\partial u}{\partial y}$は共に逓増している。しかし、無差別曲線は、原点に対して凸となる。つまり限界代替率は逓減する。

需要分析にとって本質的なのは無差別曲線の形状であって、効用関数が凸か凹ではない。いい加減なミクロの教科書は、限界効用逓減が本質的なような記述があるが、上の例が示すように限界効用の逓減・逓増と限界代替率の逓減は一般に無関係であることをしっかり理解すべきである。

2.3.4 凹関数と準凹関数の性質

すでに命題 3 でのべたように、凹関数の和は凹関数になる。しかし、次の例でみるように、準凹関数の和は準凹関数にならない。

例 12 fとgを

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & if \;\; x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & if \;\; x \geq 0 \\ x^2 & otherwise \end{cases}$$

とすると、凸かつ準凹な関数である。

$$(f+g)(x) = x^2$$

となるが、これは凸関数であるが準凹関数ではない。

命題 4 凹関数あるいは準凹関数を単調非減少関数で変換しても、凹、準凹の性質は不変。

演習 8 上の命題を証明せよ。

凹関数、準凹関数が微分可能であるとき次の命題がそれぞれ成立する。

命題 5 fが凹関数であるとき、x,yを任意の定義域の点とすると、

$$f(y) - f(x) \leq f'(x)(y - x)$$

が成立する。

命題 6 fが準凹関数であるとき、x,yを任意の定義域の点とすると、

$$f(y) \geq f(x) \Longrightarrow \leq f'(x)(y - x) \geq 0$$

が成立する。

2.3.5 厳密な凹関数、厳密な準凹関数

これは、epi fやhypo fや$\{x \mid f(x) \geq a\}$のような集合が「直線部分」をもたないことである。これは、それぞれの定義を次のように修正すると得られる。

定義 19 凸集合Xを定義域とする関数fは、任意の異なる2点$x \in X$、$y \in X$、$0 < \lambda < 1$である任意の実数λに対して、

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

が成立するとき、厳密な凹関数とよばれる。

定義 20 関数fは、定義域の任意の異なる2点x, y、$0 < \lambda < 1$である実数λに対して

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \min(x, y)$$

であるとき、厳密な準凹関数という。

2.3.6 凹関数と準凹関数が最適問題で果たす意味

凹関数や準凹関数を取り上げる理由は、それらの関数の極大値を見つけることが最大値を見つけることと同値になるからである。

2.3.7 凹関数・凸関数であることの解析的条件

次の定理が重要である。

定理 8

1. fは任意の点においてそのヘッセ行列が負の半定符号をとるとき、またそのときに限って、凹関数となる。
2. fは任意の点においてそのヘッセ行列が正の半定符号をとるとき、またそのときに限って、凸関数となる。
3. fは任意の点においてそのヘッセ行列が負の定符号をとるとき、厳密な凹関数となる。

4. fは任意の点においてそのヘッセ行列が正の定符号をとるとき、厳密な凸関数となる。

さらに、行列の定符号性については次の定義、定理が重要である。

定義 21

$$D = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

という行列の首座小行列式とは、

$$f_{11}, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \cdots \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

のそれぞれである。また、Dの$succesive$小行列式とはDの行と列をすべての順列でならべ変えた行列に関して、首座小行列式をとったものである。

注意 14 Dが3×3行列なら、その首座小行列式は、3個の行列式であるが、$successive$小行列式は、$3\times 3! = 18$個の行列式である。

定理 9 *1.* 行列Aが負の半定符号をとるためには、そのすべての$succesive$小行列式$\tilde{D}_n$が

$$(-1)^n \tilde{D}_n \geq 0$$

となることが必要かつ十分である。

2. 行列Aが正の半定符号をとるためには、そのすべての$succesive$小行列式$\tilde{D}_n$が

$$\tilde{D}_n \geq 0$$

となることが必要かつ十分である。

3. 行列Aが負の定符号をとるためには、そのすべての首座小行列式D_nが

$$(-1)^n D_n > 0$$

となることが十分である。

4. 行列Aが正の定符号をとるためには、そのすべての首座小行列式D_nが

$$D_n > 0$$

となることが十分である。

2.3.8 準凹関数であることの解析的条件

本論にはいる前に、関数fの縁つきヘッセ行列を次のように定義する。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_2 & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

ただし、

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

次の定理が重要である。

定理 10 fが準凹関数なら、任意の点xにおける縁つきヘッセ行列Bの首座小行列式B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$が

$$(-1)^k B_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

を満たす。

また、厳密な準凹関数については次の定理が成立する。

定理 11 fの任意の点xにおけるおける縁つきヘッセ行列Bの首座小行列式が

$$(-1)^k B_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

を満たすとき、fは厳密な準凹関数である。

Chapter 4

クーン=タッカーの定理（現代的条件つき最大化）