Chapter 7

時間を通じての最大化問題 II: 変分法

動学的な最適化問題であっても、実は非線形最適化問題の一種にすぎないこと。また、最適制御問題という定式化には、エレガントな最適解の必要条件としての最大値原理があることを学んだ。

動学的最適化問題は、ほとんどが最適制御問題に帰着できるため、最適制御問題をしっかり学習すれば事足りるのだが、最適制御理論が登場以前に使われていた動学的最適化問題の定式化によって経済理論が展開されることがある。よって、そうした、最適制御理論以前の定式化を学習しておくことは意味がある。

7.1 定式化

ここで取り上げるのは、変分法である。変分問題は普通は、微分可能な関数$x(t)$と、その時間tに関する導関数$\dot{x}(t)$に依存する関数（関数の関数という意味で汎関数ともいう）$\int_0^T \Phi(x(t), \dot{x}(t), t)dt$ を最大化（あるいは最小化）する問題として表わされる。ただし、$x(t)$の初期値$x(0)$と終端値$x(T)$の対が与えられるものとする。[1] こうした変分問題の解の必要条件は、オイラー方程式とよばれる。経済学においては、２０世紀前半にラムゼイが最適資本蓄積の問題を変分法を使って解いているのが本格的応用の最初であろう。。

ここでは差分形で変分問題を考える。問題は以下の通りである。

$$\text{maximize} \quad \sum_{t=0}^{T-1} \phi(x(t), x(t+1) - x(t), t) \tag{7.1}$$

$$\text{subject to} \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \tag{7.2}$$

[2]

7.2 オイラー方程式

さて$x(0), x(1), x(2), \ldots, x(T)$のうち、実際に変数とみなせるのは、$x(1), x(2), \ldots, x(T-1)$であるから、これらについて微分してゼロをおいたものが古典的な最適化の必要条件であったから、$\Delta x(t) = x(t) - x(t-1)$に注意して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x(t)} & \sum_{t=0}^{T-1} \phi(x(t), x(t+1) - x(t), t) \\
&= \frac{\partial}{\partial \Delta x(t)} \phi(x(t-1), \Delta x(t), t-1) + \frac{\partial}{\partial x(t)} \phi(x(t), \Delta x(t+1), t) - \frac{\partial}{\partial \Delta x(t+1)} \phi(x(t), \Delta x(t+1), t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

を得る。さらに、これを差分記号Δを使って整理すると、

$$\Delta \left[\frac{\partial}{\partial \Delta x(t+1)} \phi(x(t), \Delta x(t+1), t) \right] = \frac{\partial}{\partial x(t)} \phi(x(t), \Delta x(t+1), t) \tag{7.3}$$

とあらわすことができる。差分記号が使われているため(7.3)は二階の差分方程式である。つまり最適解が差分方程式の解として特徴づけられることがわかった。二階の差分方程式は、$x(0), x(1)$が所与ならば、逐次代入によって具体的な経路が求まるが、この場合、$x(0), x(T)$が所与という境界値問題であるので、具体的な$x(t)$の経路を求めるのは簡単ではない。[3]

---

[1] $x(t)$の初期値$x(0)$と導関数$\dot{x}(t)$の初期値値$\dot{x}(0)$が与えられていてもよい。また、汎関数は積分形で与えられている必要はなく、$\phi(x(T), \dot{x}(T), T)$のようなものでもかまわない。また、そうしたものと積分形汎関数との和$\int_0^T \Phi(x(t), \dot{x}(t), t)dt + \nu(x(T), \dot{x}(T), T)$でも差し支えない。

[2] $\Delta x(t) = x(t) - x(t-1)$という記法を使うと、最大化の対象は$\sum_{t=0}^{T-1} \phi(x(t), \Delta x(t+1), t)$という形になり、総和は積分に、差分記号を微分記号(ドット）に置き換えると、連想がつきやすい。

[3] 初期値として$x(0), \Delta x(1) (= x(1) - x(0))$が所与とすれば、話しは簡単である。

演習 1 変分問題を最適制御問題として定式化しなおし、最大値原理を応用してオイラー方程式を導いてみよ。

7.3 連続形の問題

差分形のオイラー方程式は、簡単に求まった。しかし、オリジナルの微分形のオイラー方程式の導出は、ここでは行わないがやや厄介である。ただし、オイラー方程式は差分記号を微分（ドット）記号に置き換えた、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\Phi(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x(t), \dot{x}(t), t) \tag{7.4}$$

になる。

参考文献

西村清彦 (1990) 『経済学のための最適化理論入門』, 東京大学出版会