ミニマックス定理

伊藤幹夫

平成11 年11 月29 日

1　2 人ゼロ和ゲーム

2 人ゼロゲームを考える。P を $m \times n$ の行列とする。ij 要素 p_{ij} は、第 1 プレーヤーが (純）戦略 i を、第 2 プレーヤーが (純）戦略 j をとったときの第 1 プレーヤーの利得を表わす。また第 2 プレーヤーの利得 q_{ij} は、ゼロ和ということから $p_{ij} + q_{ij} = 0$、つまり、$q_{ij} = -p_{ij}$ である。$S = \{1, 2, \dots, m\}$, $T = \{1, 2, \dots, n\}$ をそれぞれ、第 1 プレーヤー、第 2 プレーヤーの**純戦略集合**とよぶ。一般に、各プレーヤーの戦略集合と利得を列挙したものを**ゲーム**とよぶ。2 人ゼロ和ゲームの場合、行列 P を示すだけで十分である。

注意 1. 戦略は、戦術や手 *(move, gambit)* とは区別される。将棋やチェスを例にとれば、毎回の駒の動きが *move* であり、ゲームの開始から終了までの各プレーヤーの *move* の列 *(sequence)* が戦略とよばれるものである。

2　純戦略でのゲームの均衡

定義 1.

$$\alpha = \max_i \min_j p_{ij}$$

をゲーム P の**下限**、

$$\beta = \min_j \max_i p_{ij}$$

をゲーム P の**上限**とよぶ。

α は第一プレーヤーが得られる利得の下限であり、$-\beta$ は第二プレーヤーが得られる利得の下限（つまり、第一プレーヤーが失う利得の上限である)。

定義 2. ゲームの下限を実現する第 *1* プレーヤーの戦略 s^* を **maximin 戦略**、ゲームの上限を実現する第 *2* プレーヤーの戦略 t^* を **minimax 戦略**という。つまり、

$$s^* = argmax \min_j p_{ij}$$

$$t^* = argmin \max_i p_{ij}$$

例 1.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

において下限 $\alpha = 0$、上限 $\beta = 1$ である。また

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

において下限 $\alpha = 1$、上限 $\beta = 1$ である。

命題 1. 次の命題が成立する。

1. $\forall j \ \alpha \leq p_{s^*j}$

2. $\forall i \ \beta \geq p_{it^*}$

3. $\alpha \leq p_{s^*t^*} \leq \beta$

演習 1. 命題 *1* を証明せよ。

定義 3. ゲーム P は下限 α と上限 β が一致するとき**確定的**という。そのとき一致する値を**ゲームの値**という。ゲームの値をもたらす戦略の対を均衡戦略という。

注意 2. 例 *1* からわかるように、ゲームは確定することもあれば、しないこともある。

定義 4. ゲーム P を考える。$s \in S, t \in T$ が、

$$\forall i, j \ p_{it} \leq p_{st} \leq p_{sj}$$

を満たすとき (s, t) を**鞍点**という。また p_{st} を**鞍値**とよぶ。

次の定理が有名である。

定理 1. ゲーム P が確定するための必要十分条件は、P に鞍点が存在することである。

演習 2. 定理 *1* を証明せよ。

演習 3. P の鞍点は複数存在するかもしれない。その場合も鞍値はすべてひとしい。そのことを示す 3×3 行列のゲーム P の例を作ってみよ。

3 混合戦略と minimax 定理

フォン・ノイマンは戦略の概念を純戦略から、以下で定義する混合戦略に拡大することで、任意の 2 人ゼロ和ゲームが確定することを示した。彼の発見はゲーム論の決定的な突破口となった。

定義 5. $m \times n$ 行列で決まる *2* 人ゼロ和ゲーム P を考えるとき、

$$X = \left\{ \ (x_1, x_2, \cdots, x_m) \ \middle| \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \forall i x_i \geq 0 \ \right\}$$

$$Y = \left\{ \ (y_1, y_2, \cdots, y_n) \ \middle| \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \forall j y_j \geq 0 \ \right\}$$

をそれぞれ第 *1* プレーヤー、第 *2* プレーヤーの**混合戦略**の集合とよぶ。

注意 3. 各プレーヤーの混合戦略は、それぞれの純戦略 S, T 上の確率分布と解釈される。つまり、各プレーヤーは相手の出方に応じて自分の出方をサイコロにまかせて決めるとし、そのサイコロの目の出方（確率分布）こそが混合戦略という名でよばれる、拡張された戦略概念なのである。

注意 4. 以下ベクトルはすべて列ベクトルとして太字で表わす。また、$\mathbf{1}$ はすべての要素が *1* であるベクトルを表わす。${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表わす。

$x \in X, y \in Y$ という混合戦略をそれぞれのプレーヤーがとったときの

$${}^t\boldsymbol{x}P\boldsymbol{y}$$

を第 1 プレーヤーの**期待利得**という。

注意 5. 第 i 番目の要素のみが *1* でそれ以外はゼロであるベクトル $\boldsymbol{e}^{i\cdot}$ は X の要素であり、第 j 番目の要素のみが *1* でそれ以外はゼロであるベクトル $\boldsymbol{e}^{\cdot j}$ は Y の要素である。このとき

$${}^t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\cdot}P\boldsymbol{e}^{\cdot j} = p_{ij}$$

であるから、混合戦略が純戦略の拡張になっていることがわかる。よって、これ以降純戦略の集合 S, T と

$$\{\boldsymbol{e}^{1\cdot}, \boldsymbol{e}^{2\cdot}, \ldots, \boldsymbol{e}^{m\cdot}\}$$

$$\{\boldsymbol{e}^{\cdot 1}, \boldsymbol{e}^{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{e}^{\cdot n}\}$$

を同一視する。

なお、$\boldsymbol{e}^{i\cdot}$ を m 個ならべたものは m 次単位行列に、$\boldsymbol{e}^{\cdot j}$ を n 個ならべたものは n 次単位行列になる。

定義 6.

$$\max_{\boldsymbol{x}\in X} \min_{\boldsymbol{y}\in Y} {}^t\boldsymbol{x}P\boldsymbol{y} = \min_{\boldsymbol{y}\in Y} \max_{\boldsymbol{x}\in X} {}^t\boldsymbol{x}P\boldsymbol{y}$$

となるとき、ゲーム P は混合戦略において**確定的**という。また、そのときの値を**ゲームの値**といい $v(P)$ で表わす。また、ゲームの値をもたらす混合戦略の対 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を**均衡**という。

ゲームの鞍点も純戦略同様定義することができる。

定義 7.

$$\forall \boldsymbol{x} \in X \ \forall \boldsymbol{y} \in Y \qquad {}^t\boldsymbol{x}P\boldsymbol{y}^* \leq {}^t\boldsymbol{x}^*P\boldsymbol{y}^* \leq {}^t\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y}$$

が成立するとき $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ を混合戦略のおける**鞍点**とよび、${}^t\boldsymbol{x}^*P\boldsymbol{y}^*$ を**鞍値**とよぶ。

定理 2. ゲーム P が混合戦略において確定的であるための必要十分条件は、混合戦略における鞍点が存在することである。

演習 4. 定理 *1* の証明に準ずる形で、定理 *2* を証明せよ。

フォン・ノイマンが示したのは次の定理である。

定理 3 (ミニマックス定理). 任意の *2* 人ゼロ和ゲームは混合戦略において均衡が存在する。

証明は、不動点定理に基づくものと、凸集合の分離定理に基づくものに大別される。前者は一般の n 人非協力ゲームのナッシュ均衡の存在証明につながる。逆に言えば、n 人非協力ゲームのナッシュ均衡の特殊ケースとして 2 人ゼロ和ゲームの均衡が帰着される。この意味では、前者の証明が現代ゲーム論とかかわりが深いが、初等的な証明が可能なのは後者である。ここでは、後者の証明法を示す。

証明の概略は以下の通りである。

1. ミニマックス定理と同値な二者択一命題を示す。(補助定理 1)
2. ミンコウスキー=ファルカスの補題 (定理 4) から分離定理 (補助定理 2) を示す。
3. 分離定理から二者択一命題を示す。

補助定理 1. 次の二つの命題は同値である。

2 人ゼロ和ゲームの均衡の存在 任意の *2* 人ゼロ和ゲーム P に均衡が存在する。

二者択一命題 P を任意の *2* 人ゼロ和ゲームとするとき、以下の二つの命題のどちらか一方が成立する。

$$\exists \boldsymbol{x}^0 \in X \quad {}^t\boldsymbol{x}^0 P > {}^t\boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\exists \boldsymbol{y}^0 \in Y \quad P\boldsymbol{y}^0 \geq \boldsymbol{0} \tag{2}$$

注意 6. 上の定理に登場したベクトル同士の不等号は、各要素が不等号を満たすことを意味する。

演習 5. *(1)* と *(2)* が同時に成立しないことを示せ。（ヒント：$\boldsymbol{x}$ や $\boldsymbol{y}$ の要素が負になることはなく、必ず正の要素を含むことに着目する。）

Proof. 最初に [ゲームの均衡の存在]⟹[二者択一命題] を示す。ゲーム P の均衡の存在は鞍点の存在と同値だから、

$$\forall \boldsymbol{x} \in X \ \forall \boldsymbol{y} \in Y \, {}^t\boldsymbol{x}P\boldsymbol{y}^* \leq {}^t\boldsymbol{x}^*P\boldsymbol{y}^* \leq {}^t\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y}$$

となる $\boldsymbol{x}^* \in X,\ \boldsymbol{y}^* \in Y$ の存在が言える。${}^t\boldsymbol{x}^*P\boldsymbol{y}^* = v(P)$ である。任意の $\boldsymbol{x} \in X$ として任意の純戦略 $\boldsymbol{e}^{i\cdot}$ を考えると

$${}^t\boldsymbol{e}^{1\cdot}P\boldsymbol{y}^* \leq v(P) = {}^t\boldsymbol{x}^*P\boldsymbol{y}^*$$

これは、$P\boldsymbol{y}^*$ の各要素が $v(P)$ 以下であることを表わす。つまりベクトルでかくと、

$$P\boldsymbol{y}^* \leq {}^t(v(P), v(P), \cdots, v(P)) \tag{3}$$

同様に任意の $\boldsymbol{y} \in Y$ として任意の純戦略 $\boldsymbol{y}^{\cdot j}$ を考えて

$$(v(P), v(P), \cdots, v(P)) \leq \boldsymbol{x}^*P \tag{4}$$

が成立する。

$v(P) \geq 0$ か $v(P) < 0$ のどちらかしか成立しないことと (1) と (2) が排反的であることに注意すると、$v(P) > 0$ なら (1) が成立し (2) が成立しないことがわかる。$v(P) \leq 0$ なら (2) が成立し (1) が成立しないことがわかる。

次に [二者択一命題$\Longrightarrow$[ゲームの均衡の存在] を示す。今任意のゲーム P に対して二者択一命題が成立していると仮定する。まず、(1) が成立しているとする。Y の要素は非負で、かならず正のものがあるから。

$$\forall \boldsymbol{y} \in Y \quad {}^t\boldsymbol{x}^0 P \boldsymbol{y} > 0$$

$$v_1(P) := \max_{\boldsymbol{x} \in X} \min_{\boldsymbol{y} \in Y} {}^t\boldsymbol{x} P \boldsymbol{y} \geq \min_{\boldsymbol{y} \in Y} {}^t\boldsymbol{x}^0 P \boldsymbol{y} > 0 \tag{5}$$

同様に (2) が成立しているとすると、

$$v_2(P) := \min_{\boldsymbol{y} \in Y} \max_{\boldsymbol{x} \in X} {}^t\boldsymbol{x} P \boldsymbol{y} \leq \max_{\boldsymbol{x} \in X} {}^t\boldsymbol{x} P \boldsymbol{y}^0 \leq 0 \tag{6}$$

となる。これら 2 式のどちらかが成立する。

今仮に $v_1(P) < v_2(P)$ とすると、$\exists c \quad v_1(P) < c < v_2(P)$ であり、

$$Q = P - c \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

として別のゲーム Q を定義する。このゲーム Q について下限 $v_1(Q)$ と $v_2(Q)$ を計算すると、

$$v_1(Q) < 0 < v_2(Q) \tag{7}$$

が成立する。これは、任意のゲームについて (5) か (6) の一方が成立することに矛盾する。よって、

$$v_1(P) \geq v_2(P)$$

である。しかし、一般に $v_1(P) \leq v_2(P)$ であるから、

$$v_1(P) = v_2(P)$$

つまり maximin 値と minimax 値が一致する。これは均衡が成立することを意味する。 □

演習 6. *(7)* を $v_1(P) < v_2(P)$ から導け。

定理 4 (Minkowski-Farkas). A を任意の $m \times n$ 行列、$\boldsymbol{b}$ を m 次ベクトルとする。次の二つの命題は同値である。

$$\exists \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{8}$$

$$\forall \boldsymbol{p} \quad ({}^t\boldsymbol{p}A \geq {}^t\boldsymbol{0} \Longrightarrow {}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{b} \geq 0) \tag{9}$$

を使って、以下の分離定理が示せる[1]。

補助定理 2 (凸多面体の分離定理). C を有限個のベクトル $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_\ell$ の凸結合の全体とする。つまり

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \boldsymbol{c}_i \;\middle|\; \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1 \right\}$$

という凸多面体とする。$\boldsymbol{c} \notin C$ とすると、

$$\exists \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0} \quad \exists c \quad \forall \boldsymbol{d} \in C \quad {}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{d} > c \ and \ {}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{c} = c \tag{10}$$

[1]定理 4 の初等的証明は、戸瀬・伊藤の教科書をみよ。

演習 7. 定理 *4* から補助定理 *2* を導け。ヒント：定理の *4* の二つの命題の待遇を考え、A として

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ c_{11} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{11} & \cdots & c_{1\ell} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{b}$ として ${}^t(1, c_1, c_2, \cdots, c_m)$ を考えればよい。

[**定理 3** の証明] $m \times n$ 行列 P に $m \times m$ の単位行列をならべた $m \times (n+m)$ 行列 $(P \quad I)$ の $n+m$ 個の列ベクトルから作られる凸多面体を C とする。以下二つの場合に分ける

$\mathbf{0} \notin C$ の場合： 定理 2 より、

$$\exists \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{c} \in C \quad {}^t\boldsymbol{c}\boldsymbol{x} > 0 \tag{11}$$

$\boldsymbol{c}$ として $(P \quad I)$ の後半 m 個の単位ベクトルをとることにより、$\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ がわかる。また、$\boldsymbol{c}$ として $(P \quad I)$ の前半、つまり P の各列 $\boldsymbol{p}_j$ をとることで、${}^t\boldsymbol{x}P > {}^t\mathbf{0}$ がわかる。ここで

$$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}/{}^t\mathbf{1}\boldsymbol{x} \tag{12}$$

とおけば、$\boldsymbol{x}^0 \in X$ かつ ${}^t\boldsymbol{x}^0 P > 0$ となり、(1) が示される。

$\mathbf{0} \in C$ の場合 このとき、

$$\exists \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \quad \exists \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \quad {}^t\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} + {}^t\mathbf{1}\boldsymbol{\mu} = 1 \text{ and } \ P\lambda + I\mu = \mathbf{0} \tag{13}$$

$I\mu \geq \mathbf{0}$ だから

$$P\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \tag{14}$$

${}^t\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} = 0$ とすると (13) と (14) から $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ となるから ${}^t\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} + {}^t\mathbf{1}\boldsymbol{\mu} = 1$ に矛盾。よって、${}^t\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} > 0$ である。よって、

$$\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{\lambda}/{}^t\mathbf{1}\boldsymbol{y}$$

とおけば、

$$P\boldsymbol{y}^0 \leq \mathbf{0}$$

となり (2) が示された。（ミニマックス定理の証明おわり）