数理経済学第４回 (9904) [*]　　慶應義塾大学経済学部：矢野　誠

４．選好の推移性，完備性に基づかない需要理論
ソーネンシャインの理論

４．１．基本的仮定.

P ：強選好関係に基づく.
弱選好 R の定義：　$x \in R(z) \Leftrightarrow \quad z \notin P(x)$

予算対応：　$B(p,m) = \{z \in C : pz \le m\}$.
需要対応：　$D(p,m) = \{z \in B(p,m) : zRx \ \forall x \in B(p,m)\}$.

仮定４．１．１．消費集合 $C \neq f$，凸閉集合，下から有界
仮定１と同じ

Strictly Preferred Set　$P(x) = \{x \in C : \ zPx\}$.
Weakly Preferred Set　$R(x) = \{z \in C : \ \sim xPz\}$.

A の凸包：　$K(A) := \{x : \ x = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i, \ \ x_i \in A, \ \ a_i \ge 0, \ \ \sum_{i=1}^{r} a_i = 1, \ \ r \in N\}$

N : 自然数の集合　$N = \{1,2,...\}$.

仮定４．１．２．　P は C 上の二項関係で
$x \notin K(P(x))$.

注意：　R は推移性，reflexivity を持たなくてもよい.

仮定４．１．３．　$R(x)$　は C の相対位相に関して閉集合.

相対位相：　S を位相空間とするとき，　$C \subset S$ 上の相対位相とは S の開部分集合 U と C の共通部分 $C \cap U$ を開集合の集まりとする位相のことである.

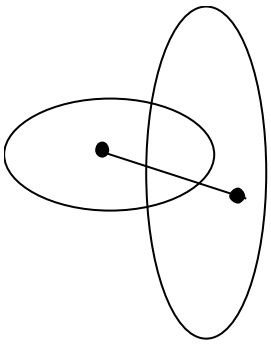
[*] Copy Right © 1999 矢野 誠.

４．２．KKM 定理

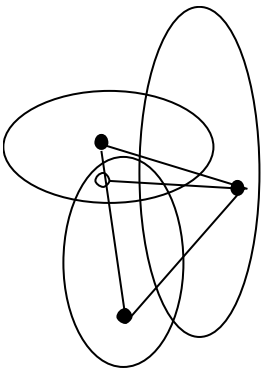
KKM 定理（Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz)**.** $S_1,...,S_r$ **が** R^n **の** r **個の閉部分集合であるとせよ.**

$$\exists(a_1,...,a_r):\ \forall J \subset \{1,...,r\},\ K(\{a_j : j \in J\}) \subset \cup_{j\in J} S_j \ \Rightarrow\ \cap_{i=1}^{I} S_i \neq f \quad .$$

$r=2$ **のケース**



$r=3$ **のケース**



４．３．一般化された需要対応の存在

補題４．３．１． $z \notin R(x) \Leftrightarrow x \in P(z)$

$$B_x := \{z \in B(p,m) : z \in R(x)\}$$

補題４．３．２． $B(p,m)$ と B_x はコンパクト．

宿題４．３．３．補題４．３．２を証明せよ．

補題４．３．４． $x_1,...,x_r$ を $B(p,m)$ のなかの r 個の点とすると，

$$\forall J \subset \{1,...,r\}, \quad K(\{x_j : j \in J\}) \subset \cup_{j \in J} B_{x_j}.$$

Pr. もし結論が誤っていると，

$$\exists z \in K(\{x_j : j \in J\}) : z \notin B_{x_j} \quad \forall j \in J.$$

$z \in K(\{x_j : j \in J\})$ は $z \in B(p,m)$ を意味しているので，$z \notin B_{x_j}$ ということは $z \notin R(x_j)$．つまり，$x_j \in P(z)$ である．したがって，$x_j \in P(z)$ がすべての $j \in J$ に成り立ち，z は x_j の凸結合なので，$z \in K(P(z))$ となり矛盾．

定理４．３．５（需要対応の存在）． $p >> 0$，$B(p,m) \neq f \Rightarrow D_g(p,m) \neq f$．

Pr．L０と L２より，どんな有限個の $x_1,...,x_r$ を $B(p,m)$ のなかから選んでも，$\cap_{j \in J} B_{x_j} \neq f$．$p >> 0$ のとき $B(p,m)$ はコンパクトなので，有限交差性の定理より，$\cap_{x \in H(p,m)} B_x \neq f$．したがって，

$$\exists z : \forall x \in B(p,m),\ z \in B_x.$$

定理を示すためには $z \in D_g(p,m)$ を証明すればよい．そのために，$z \in B_x$ だから $z \in B(p,m)$ であることを使うと，どんな $x \in B(p,m)$ についても $z \in R(x)$ がなりたつことがわかる．

宿題４．３．６．ここまで検討してきた需要の存在定理の仮定を比べ，それぞれの関係をまとめよ．