数理経済学第 5 回（9905）[*]　　慶應義塾大学経済学部：矢野　誠

５．需要対応と供給対応における代替効果と所得効果

５．１．企業の生産集合

R^N ： 財空間

$Y \subset R^N$ ：企業の生産技術
$y \in Y$ ：技術的に実行可能な生産活動

$y = (y_1, ..., y_N)$ ： インプット・アウトプットのベクター

$y_i > 0$ ： この財 i はこの企業によって生産される.
$y_i < 0$ ： この財 i は生産要素として投入される.
$y_i \equiv 0$ ： この財 i はこの企業の生産とはまったく無関係

５．２．企業の行動と供給対応

py ： 利潤
$\max_y \quad py \quad s.t. \quad y \in Y$.

技術的に実行可能な生産活動のうちで利潤を最大にするものを選ぶ.

$S(p) = \arg\max_y \quad py \quad s.t. \quad y \in Y$ ： 供給対応

[*] Copy Right © 1999 矢野 誠.

５．３．供給対応における代替効果

定理５．３．１． $y \in S(p)$, $y + \Delta y \in S(p + \Delta p) \Rightarrow \Delta p \Delta y \geq 0$ ．

証明： $y \in S(p)$, $y + \Delta y \in S(p + \Delta p)$ **ということは**

１． $y \in Y$, $y + \Delta y \in Y$ ．

したがって， S **の定義から，**

$$py \geq p(y + \Delta y) \ , \quad (p + \Delta p)(y + \Delta y) \geq (p + \Delta p)y \ .$$

つまり， $p\Delta y \leq 0$ **かつ** $-(p + \Delta p)\Delta y \leq 0$ **なので，両者を足せば，** $\Delta p \Delta y \geq 0$ **となることがわかる．**

系５．３．２． $\Delta p = (\Delta p_1, ..., \Delta p_N)$, $\Delta p_{i'} = 0 \ \ \forall i' \neq i \Rightarrow \Delta p_i \Delta y_i \geq 0$ ．

宿題：この結果は，生産物価格の上昇はその生産物の供給を必ず拡大し，生産要素価格の上昇はその生産要素の需要を必ず減少させることを意味している．この事実を説明せよ．

５．４．供給対応の代替効果と需要対応の代替効果と所得効果

供給対応： $S(p) = \arg\max_y \ py \ \ \text{s.t.} \ \ y \in Y$ ．

需要対応： $D(p, m) = \arg\max_x \ u(x) \ \ \text{s.t.} \ \ px \leq m$ ．

補償需要対応： $D_C(p, u) = \arg\min_x \ px \ \ \text{s.t.} \ \ u(x) \geq u$

すでに示した通り，供給対応や補償需要対応では，代替効果の結果，価格上昇が需要の減少（供給の増加）を必ず意味する．通常の需要対応では，価格変化が代替効果のみではなく所得効果をも持つ．この違いはどこから発生したものか．

数学的には，供給対応や補償需要対応は価格変化が選択肢集合に影響しない場合の最適化の結果であるのに対し，需要対応では，価格変化が選択肢集合に影響している場合の最適化の結果であるという違いで説明できる．

５．５．需要対応と補償需要対応の間のインターフェース（接続媒体）

間接効用関数： $v(p,m) = \max_x u(x)$ s.t. $px \le m$.

選好の凸性と効用関数．選好が凸とは

(1) $u(x'') > u(x')$, $x = ax' + (1-a)x''$, $0 < a < 1$ **ならば,** $u(x'') > u(x) > u(x')$.

定理５．５．１．選好が非飽和，凸，連続，かつ $\mathrm{int}\, B(p,m) \neq f$ **.**

$$\Rightarrow \quad D(p,m) = D_C(p, v(p,m))$$

証明：後回し.

定理の意味： $u = v(p,m)$ **とおくと,**

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_i} D_j(p,m) &= \frac{\partial}{\partial p_i} D_{Cj}(p, v(p,m)) \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i} D_{Cj}(p,u)}_{\text{代替効果}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} D_{Cj}(p,u) \frac{\partial}{\partial p_j} v(p,m)}_{\text{所得効果}}\end{aligned}$$

所得効果は価格上昇が効用を $-\frac{\partial}{\partial p_i} v(p,m) > 0$ **だけ低下させ，効用水準の変化が** u **を最小費用で達成するための需要を** $\frac{\partial}{\partial u} D_{Cj}(p,u)$ **だけ変化させることから発生する.**

宿題：この議論を図を使って説明せよ.

５．６．定理５．５．１の証明

補題５．６．１． $x \in D_C(p, v(p,m))$ ならば， $px = m$．

証明： $w \in D(p,m)$ とせよ．そうすると， $u(x) \geq v(p,m) = u(w)$ かつ $pw \leq m$ である．したがって，もし $px > m$ ならば， $x \in D_C(p, v(p,m))$ に反する．

つぎに， $px < m$ であるとせよ．選好の非飽和から $u(x'') > u(x)$ なる x'' が存在する．そこで，$0 < a < 1$ について， $z = ax'' + (1-a)x$ とせよ．ここで， a を十分に 0 に近くとると，選好の凸性と $px < m$ から， $u(z) > u(x)$ かつ $px < pz < m$ が成立する． $u(z) > u(x) \geq v(p,m) = u(w)$ なので， $w \in D(p,m)$ に矛盾．

定理の証明：$x \in D(p,m)$ とせよ．もし $x \notin D_C(p, v(p,m))$ ならば， $u(x') \geq u(x)$ かつ $px' < px = m$ となる x' が存在しなくてはならない．選好は非飽和なので，$u(x'') > u(x')$ が必ず存在する．そこで，$0 < a < 1$ について， $z = ax'' + (1-a)x'$ とせよ．ここで， a を十分に 0 に近くとると，選好の凸性と $px' < px$ から，$u(z) > u(x') \geq u(x)$ かつ $pz < px = m$ が成立する．これは， $x \in D(p,m)$ に矛盾．

逆に， $x \in D_C(p, v(p,m))$ かつ $x \notin D(p,m)$ とせよ．そうすると，補題５．６．１より， $px = m$．したがって， $x \notin D(p,m)$ ならば， $u(z) > u(x)$ かつ $pz \leq m$ なる z が存在する． $\mathrm{int}\, B(p,m) \neq f$ なので， $w \in \mathrm{int}\, B(p,m)$ とすると， $pw < m$ である．ここで， $z(a) = aw + (1-a)z$ と定義せよ．そのとき，$0 < a < 1$ ならば $pz(a) \leq m$ であり， $a \to 0$ のとき $z(a) \to z$ である．したがって，選好の連続性から， $u(z(a)) \to u(z)$ が成立するので， a を十分に 0 に近くとると， $u(z) > u(z(a)) > v(p,m)$ かつ $pz(a) < m$ が成立する．矛盾．