数理経済学第６回（9906）[*]　　慶應義塾大学経済学部：矢野　誠

６．ラグランジェ乗数法
および需要対応における代替効果と所得効果の分析
（講義の内容とは少し異なるので，注意してください.）

６．１．所得効果と代替効果への分解

需要対応：　$D(p,m) = \arg\max_x \ u(x) \quad \text{s.t.} \quad px \le m$.

補償需要対応：　$D_C(p,u) = \arg\min_x \ px \quad \text{s.t.} \quad u(x) \ge u$.

間接効用関数：　$v(p,m) = \max_x \ u(x) \quad \text{s.t.} \quad px \le m$.

もし D と D_C が微分可能な関数ならば,

(1)　$$D(p,m) = D_C(p, v(p,m)) \ .$$

また，$u = v(p,m)$ とおくと,

(2)　$$\frac{\partial}{\partial p_i} D_j(p,m) = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{Cj}(p, v(p,m))$$
$$= \frac{\partial}{\partial p_i} D_{Cj}(p,u) \ + \ \frac{\partial}{\partial u} D_{Cj}(p,u) \frac{\partial}{\partial p_j} v(p,m).$$

選好の凸性と効用関数．選好が凸とは

(3) $u(x'') > u(x')$,　$x = \alpha x' + (1-\alpha)x''$,　$0 < \alpha < 1$ ならば,　$u(x'') > u(x) > u(x')$.

定理６．１．１．選好が凸かつ $\text{int}\, B(p,m) \ne f$ であるとせよ．間接効用関数が微分可能ならば,

$$\frac{\partial}{\partial p_i} v(p,m) = -x_i \frac{\partial}{\partial m} v(p,m)$$

証明：後回し.

---

[*] Copy Right © 1999 矢野 誠.

系６．１．２．選好が凸かつ $\mathrm{int}\, B(p,m) \neq f$ **であるとせよ．間接効用関数，需要対応，補償需要対応がどれも微分可能であるとせよ．そのとき，**

$$\frac{\partial}{\partial p_i} D_j(p,m) = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{Cj}(p,u) - x_i \frac{\partial}{\partial m} D_j(p,m)$$

証明．定理６．１．１から，(2) **を書き換えると，**

$$\frac{\partial}{\partial p_i} D_j(p,m) = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{Cj}(p,u) - x_i \frac{\partial}{\partial u} D_{Cj}(p,m) \frac{\partial}{\partial m} v(p,m)$$

となる．また，(1) **から，** $u = v(p,m)$ **について，**

$$\frac{\partial}{\partial m} D_j(p,m) = \frac{\partial}{\partial u} D_{Cj}(p,u) \frac{\partial}{\partial m} v(p,m) \quad .$$

証明終り．

価格変化の交差効果：

$$\frac{\partial}{\partial p_i} D_j(p,m) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i} D_{Cj}(p,u)}_{\text{代替効果}} - \underbrace{x_j \frac{\partial}{\partial m} D_j(p,m)}_{\text{所得効果}}$$

価格変化の直接効果： $j = i$ **とすると，**

$$\frac{\partial}{\partial p_i} D_i(p,m) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i} D_{Ci}(p,u)}_{(-)} - x_i \frac{\partial}{\partial m} D_i(p,m)$$

$$\frac{\partial}{\partial m} D_i(p,m) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \qquad \begin{matrix} \text{正常財} \\ \text{下級財} \end{matrix} \quad .$$

需要の法則： $\frac{\partial}{\partial p_i} D_i(p,m) < 0$ **．**

ギッフェン財： $\frac{\partial}{\partial p_i} D_i(p,m) > 0$**，需要の法則が成立しない．**

６．２．ラグランジェ乗数法

つぎの最大化問題を考えよ．

$$
\text{(I)} \qquad \begin{array}{ll} \max_{x \in R^n} & f(x) \\ & g_1(x) \geq c_1 \\ \text{s.t.} & \cdots \\ & g_m(x) \geq c_m \end{array}
$$

ラグランジェ式：　$L(x, l) = f(x) + l_1(c_1 - g_1(x)) + \ldots + l_m(c_m - g_m(x))$

l_j は制約条件 $g_j(x) \geq c_j$ のラグランジェ乗数

ラグランジェ乗数法：L を各変数で偏微分してゼロとおいた $n+m$ 個の連立方程式を n 個の選択変数 x と m 個のラグランジェ乗数 l に関する連立方程式と考えて解く．

$$
\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_i(x) - l_1 g_{1i}(x) - \ldots - l_m g_{mi}(x) = 0 \quad ,
$$

ここで，$f_i(x) = \partial f(x_1, \ldots, x_n) / \partial x_i$ ，$g_{ji}(x) = \partial g_j(x_1, \ldots, x_n) / \partial x_i$ である．また，

$$
\frac{\partial L}{\partial l_j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_j(x) = c_j \quad .
$$

したがって，L を各変数で偏微分してゼロとおいた連立方程式の体系は

$$
\begin{array}{l}
f_1(x_1, \ldots, x_n) - l_1 g_{11}(x_1, \ldots, x_n) - \ldots - l_m g_{m1}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\
\qquad \cdots \\
f_n(x_1, \ldots, x_n) - l_1 g_{1n}(x_1, \ldots, x_n) - \ldots - l_m g_{mn}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \\
\qquad \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g_m(x_1, \ldots, x_n) = c_n
\end{array}
$$

となる．この体系は $x_1, \ldots, x_n$，$l_1, \ldots, l_m$ を変数とする連立方程式と考えられる．この連立方程式の解を $x_1^*, \ldots, x_n^*$，$l_1^*, \ldots, l_m^*$ とおくと，関数 f や g_1 から g_m がある条件を満たすならば，$x_1^*, \ldots, x_n^*$ が最大化問題 (I) の解である．

宿題：次の問題をラグランジェ乗数法で解け．

（１）　$\max_{x,y,z} \quad x + y + z \quad \text{s.t.} \quad ax^2 + by^2 + gz^2 \leq c$ ．

（２）　$\max_{x,y,z} \quad -(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{s.t.} \quad ax + by + gz \geq c, \quad x + y + z \geq 1$ ．

６．３．ラグランジェの定理

定理６．３．１（ラグランジェの定理）． x^* を最大化問題 (I) の解，関数 $L(x,l)$ をラグランジェ式であるとせよ．関数 f，g_1，…，g_m が凹ならば，$(l_1^*,\ldots,l_m^*)\neq 0$ が存在して，

$$\frac{\partial}{\partial x_i}L(x^*,l^*)=0,\quad i=1,\ldots,n,\ \text{と}\quad \frac{\partial}{\partial l_j}L(x^*,l^*)=0$$

が成立する．

定理６．３．２（最適化の一次条件）． x^* を最大化問題 (I) の解であるとせよ．関数 f，g_1，…，g_m が凹ならば，$(l_1^*,\ldots,l_m^*)\neq 0$ が存在して，

(4) $$\frac{\partial}{\partial x_i}f(x^*)+\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{m}l_j^*g_j(x^*)=0,\quad i=1,\ldots,n,$$

(5) $$g_j(x^*)=g_j\ ,\qquad j=1,\ldots,m$$

が成立する．

６．４．ラグランジェ乗数の意味

制約条件の利き方の強さを示すものである．言い換えると，j 番目の制約条件 $g_j(x) \le \bar{g}_j$ の利き方の強さを定めるパラメター $\bar{g}_j$ が一単位大きくなったときに，最適化された目的関数の値がどれだけ変化するかを示すものである．つまり，

$$q(c_1,..,c_m) = \arg\max_{x \in R^n} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_1(x) \ge c_1 \quad ,..., \quad g_m(x) \ge c_m \quad .$$

とおくと，次の関係が成立する．

定理６．４．１．関数 f，g_1，...，g_m は凹であり，$x_1^*,...,x_n^*$，$l_1^*,...,l_m^*$ が (4) と (5) からなる $n+m$ 本の方程式からなる連立方程式の解であるとせよ．すべての j について $g_j(x^*) = c_j$ ならば，

(6) $$\frac{\partial q(c_1,...,c_m)}{\partial c_j} = l_j^* \quad .$$

証明．制約条件が binding であるという仮定（$g_j(x) = c_j$）のもとで，全微分すると，

(7) $$dc_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} dx_i \quad .$$

また，目的関数を全微分すると，定理６．３．２から，

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} l_j \frac{\partial g_j(x^*}{\partial x_i} dx_i = \sum_{j=1}^{m} l_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i$$

が成立する．したがって，(7) から，

(8) $$df = \sum_{j=1}^{m} l_j dc_j \quad .$$

証明終り．

宿題（大学院生用）．これで証明の骨子は終わりであるが，(7) の成立を示すことで，なぜ (6) が示されたことになるのかを説明せよ．

宿題．定理６．１．１の証明において，ラグランジェの定理から，l を消費者の効用最大化問題のラグランジェ乗数であるとすると，どの i についても，$u_i(x) = lp_i$ であるとされているが，この事実を証明せよ．

６．５．定理６．１．１の証明

ラグランジェの定理から，　l　を消費者の効用最大化問題のラグランジェ乗数であるとすると，どの i についても，　$u_i(x) = lp_i$　である．したがって，

$$du = \sum_{i=1}^{N} u_i(x_i)dx_i = l\sum_{i=1}^{N} p_i dx_i = l\sum_{i=1}^{N}(-x_i dp_i + dm) \quad .$$

この事実から，　$l = \dfrac{\partial}{\partial m}v(p,m)$　，　$-lx_i = \dfrac{\partial}{\partial p_i}v(p_i,m)$　であるから，定理が成り立つ．証明終わり．