数理経済学第７回（9907）[*]　　慶應義塾大学経済学部：矢野　誠

７．分離定理とラグランジェ乗数法

７．１．制約条件付き最大化問題とラグランジェ乗数法

$$
\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &\max_{x \in R^n} \quad f(x) \\ &s.t. \quad g_1(x) \geq c_1 \\ &\qquad\quad g_m(x) \geq c_m \quad . \end{aligned}
$$

凹関数：　f が凹関数

$$0 \leq a \leq 1 \quad \Rightarrow \quad af(x') + (1-a)f(x'') \leq f(ax' + (1-a)x'')$$

ラグランジェ式：　$L(x, l) = f(x) + l_1[c_1 - g_1(x)] + \ldots + l_m[c_m - g_m(x)]$

定理６．３．１（ラグランジェの定理）． x^* を最大化問題 (I) の解であるとせよ．関数 f，g_1，…，g_m が凹ならば，$(l_1, \ldots, l_m) \neq 0$ が存在して，

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(x, l) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \text{ と } \quad \frac{\partial}{\partial l_j} L(x, l) = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

が成立する．

---

[*] Copy Right © 1999 矢野 誠.

７．２．分離定理とラグランジェの定理の証明

定理７．２．１（分離定理）．二つの閉凸集合 $A \subset R^n$ **と** $B \subset R^n$ **があって，** A **の次元が** n**，** B **の次元が** n **以下であるとせよ．もし，** A **の内点と** B **の共通部分が空ならば，ある** $p \in R^n$**，** $p \neq 0$**，と** $k \in R$ **が存在し以下が成立する．**

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \qquad px \leq k \leq py.$$

分離定理は証明しないが，図を使えば直感的には明らかな定理であることがわかる．

図解

ラグランジェ乗数法を理解するためには，分離定理から議論する必要がある．

$G = \{x \in R^n : \ g_1(x) \geq c_1, \ldots, \ g_m(x) \geq c_m\}$ **を制約条件の集合とする．** .

制約条件が制約として意味を持つためには， $G \neq R^n$ **である．**

定理７．２．２． x^* **を問題** (I) **の解であり，関数** f**，** g_1**，…，** g_m **が連続で凹であるとせよ．** $G \neq R^n$ **かつ** $\operatorname{int} G \neq f$ **ならば，** $(m_1, \ldots, m_m) \neq 0$ **が存在して，以下が成立する．**

(4) $$f(x^*) + m_1 g_m(x^*) + \ldots + m_m g_m(x^*) \geq f(x) + m_1 g_1(x) + \ldots + m_m g_m(x) \quad \forall x \in R^n.$$

証明．あと回し．

定理６．３．１の証明． $m_1 = -l_1$**，…，** $m_m = -l_m$ **と置くと，** (4) **式から定理６．３．１が成立することがわかる．証明終わり．**

７．３．定理７．２．２の証明の図解（二次元のケース）

(II) $\max_{x\in R^n} \quad f(x) \quad s.t. \quad g(x)\geq c$ ．

定理７．３．１． x^* を問題 (II) の解であるとせよ．関数 f，g が連続かつ凹で，$G\neq R^n$ かつ $\operatorname{int} G\neq f$ ならば，$m\neq 0$ が存在して，以下が成立する．

(5) $$f(x^*)+mg(x^*)\geq f(x)+mg(x) \quad \forall x\in R^n.$$

証明． あと回し．

まず，$Z=\{(f,g)\in R^2 \mid f\leq f(x),\ g\leq g(x),\ x\in R^n\}$
という集合を考えよ．

Z の構造の図解

図に示すように，Z は凸である．

補題７．３．１． 関数 f と g が凹ならば，Z は凸である．

注意：関数 f と g が連続でも，Z が閉ではない．

証明． $(f',g')\in Z$，$(f'',g'')\in Z$ として，$0\leq a\leq 1$ について，

(6) $$a(f',g')+(1-a)(f'',g'')\in Z$$

であることを示せばよい．$(f',g')\in Z$，$(f'',g'')\in Z$ ということは，$x'\in R^2$ と $x''\in R^2$ が存在して，

$$f'\leq f(x'),\quad g'\leq g(x'),\quad f''\leq f(x''),\quad g''\leq g(x'')$$

である．そうすると，$f(x)$ と $g(x)$ の凸性から，

$$af'+(1-a)f''\leq af(x')+(1-a)f(x'')\leq f(ax'+(1-a)x'')$$
$$ag'+(1-a)g''\leq ag(x')+(1-a)g(x'')\leq g(ax'+(1-a)x'') \ .$$

この事実から，$x=ax'+(1-a)x''$ とおくと，

$$af'+(1-a)f''\leq f(x) \quad \text{かつ} \quad ag'+(1-a)g''\leq g(x)$$

ということを意味しているので，(6) が成立する．したがって，Z が閉集合ならば，定理が成り立つ．証明終わり．

宿題： Z **が閉であることを証明せよ.**

補題７．３．２． (II) の解 x^* を使って，$(f^*,g^*)=(f(x^*),g(x^*))$ とおくと，$(f^*,g^*)\in Z$ かつ $(f^*,g^*)\notin \mathrm{int}\,Z$ である．

証明． $(f^*,g^*)\in Z$ であることは x^* が (II) の解ならば $x^*\in Z$ であることから明らかである．$(f^*,g^*)\in \mathrm{int}\,Z$ であるとしよう．そうすると，ある $(f',g')\in Z$ が存在して，$f^*<f'$ かつ $g^*<g'$ でなくてはならない．$(f',g')\in Z$ は $x'\in R^n$ が存在して，$(f',g')=(f(x'),g(x'))$ とかけるということなので，$f(x')>f^*(x^*)$ かつ $g(x')>g^*(x)\geq c$ である．これは x^* が (II) の解ではないことを意味するので矛盾．証明終わり．

定理７．３．１の証明（二次元のケース）． $W^*=\{(f^*,g^*)\}$ とおく．そうすると，補題７．３．２より，Z の内部と W^* は共通部分を持たない．したがって，分離定理が使え，$(m_0,m)\neq 0$ が存在して，

(7) $$m_0 f^*+mg^*\geq m_0 f+mg \quad \forall (f,g)\in Z$$

となることがわかる．これは，

(8) $$m_0 f^*+mg^*\geq m_0 f(x)+mg(x) \quad \forall x\in R^n$$

を意味するので，$m_0>0$ であることを証明できれば，定理が証明できる．

そのために，$m_0>0$ ではないとしよう．このとき，$m_0=0$ と $m_0<0$ という二つのケースがありうる．まず，$m_0=0$ であるとしよう．$(m_0,m)\neq 0$ より，(8) は $m\neq 0$ かつ

$$mg(x^*)\geq mg(x) \quad \forall x^*\in R^n \quad .$$

もし $m>0$ ならば，$g(x^*)\geq g(x)$ $\forall x^*\in R^n$ となる．これは $\mathrm{int}\,G\neq f$ という仮定に反する（$x\in \mathrm{int}\,G$ ならば，$g(x)>c$ だからである）．また，もし $m<0$ ならば，これは $c\leq g(x^*)\leq g(x)$ $\forall x^*\in R^n$ を意味している．これは，$x''\notin G$ なる x'' が存在するという仮定に矛盾する．

次に，$m_0<0$ としよう．その場合には，$f<f^*$ なる f をとると，$(f^*,g^*)\in Z$ なので，Z の定義から，$(f,g^*)\in Z$ となる．したがって，(7) に $(f,g)=(f,g^*)$ を代入しても，(7) の不等号が成立する．そこで，実際に代入すると，$m_0(f^*-f)\geq 0$ となるが，$m_0<0$ なので，$f^*\leq f$ である．これは，$f<f^*$ に矛盾．したがって，$m_0>0$ である．証明終わり．

７．４．定理７．２．２の証明の概略.

集合 Z を以下のように定義せよ.

$$Z=\{(f,g_1,\dots,g_m)\in R^{m+1} \mid f\le f(x),\ g_1\le g_1(x),\dots,g_m\le g_m(x),\ x\in R^n\}.$$

はじめに，Z が凸集合であることを示す．このために,

$$z'=(f',g_1',\dots,g_m')\in Z,\quad z''\in(f'',g_1'',\dots,g_m'')\in Z$$

であるとせよ．そうすると，x'，$x''\in R^n$ が存在して,

$$(f',g_1',\dots,g_m')\le(f(x'),g_1(x'),\dots,g_m(x'))$$
$$(f'',g_1'',\dots,g_m'')\le(f(x''),g_1(x''),\dots,g_m(x''))$$

である．いま，a，$0<a<1$，をとって,

$$z=az'+(1-a)z'',\qquad x=ax'+(1-a)x''$$

とおくと,

$$z=a(f(x'),g_1(x'),\dots,g_m(x''))+(1-a)(f(x''),g_1(x''),\dots,g_m(x''))$$
$$\le(f(x),g_1(x),\dots,g_m(x)).$$

したがって，$z\in Z$.

つぎに，$z^*=(f(x^*),g_1(x^*),\dots,g_m(x^*))$ が Z の境界上にあることを示す．もし Z の内点にあるとしたら，十分小さい $e>0$ をとれば，$|z-z^*|<e$ をみたすどんな z についても $z\in Z$ が成立する．したがって，$z^{**}=(f^{**},g_1^*,\dots,g_m^*)$，$f^{**}>f(x^*)$，$g_1^{**}=g_1(x^{**}),\dots,g_m^{**}=g_m(x^{**})$ をみたすような z^{**} が存在して，$z^{**}\in Z$ をみたす．したがって，これに対応して

$$z^{**}=(f(x^{**}),g_1(x^{**}),\dots,g_m(x^{**}))$$

となる x^{**} が存在し,

$$f(x^{**})>f(x^*),\quad g_1(x^{**})=g_1(x^*)\le 0,\ \dots,\ g_m(x^{**})=g_m(x^*)\le 0,$$

となるので，x^* が解であることに矛盾する.

したがって，z^* と Z はともに閉凸集合で，共通部分が内点をもたないことが証明された.

そこで，分離定理を使うと，$l\in R^{m+1},\ l\ne 0$，と $k\in R$ が存在し,

$$\forall z\in Z,\quad pz\le k\le pz^*\ .$$

つまり，$l=(l_0,l_1,\dots,l_m)$ とおくと,

$$l_0f(x^*)+l_1g_1(x^*)+\dots+l_mg_m(x^*)$$
$$\ge l_0f(x)+l_1g_1(x)+\dots+l_mg_m(x)\qquad \forall x\in R^n$$

が成立する.

最後に $l_0>0$ であることを証明すればよい．まず，制約条件が binding のケ

ースを考える．そのために，$l_0 < 0$ であるとせよ．そのとき，仮定より $(g_1(x^*),...,g_m(x^*)) = (g_1(x),...,g_m(x))$ なる x が存在するので，その x について，

$$f(x^*) < f(x)$$

となって，矛盾．また，$l_0 = 0$ ならば，

$$l_1 g_1(x^*) + ... + l_m g_m(x^*)$$
$$\geq l_1 g_1(x) + ... + l_m g_m(x) \qquad \forall x \in R^n$$

かつ $l_{\sim 0} \neq 0$ となって矛盾．

宿題（大学院生用）：$m = 2$，つまり制約条件が二本ある場合について，Z のグラフをつかって，それぞれの制約条件に一つずつラグランジェ乗数が定まらなくてはならないことを説明せよ．

宿題（大学院生用）：m が一般のケースの証明を，$m = 2$ のケースの証明に沿って，完成させよ．