数理経済学第１０回（9910）[*]　　慶應義塾大学経済学部：矢野　誠

## １０．厚生経済学の第二定理と分離定理

### １０．１．パレート最適点の基礎的性質

どのパレート最適な配分も所得再分配を適当に行えば，競争均衡として達成される.

$$Y := \sum_{f=1}^{F} Y^f = \{y : y = \sum_{f=1}^{F} y^f,\ \ y^f \in Y^f,\ \ f = 1,\ldots,F\} \quad .$$

$$P(x^1,\ldots,x^H) := \{x \in C : x = \sum_{h=1}^{H} x^h,\ x^h \in R^h(x^h)\,\forall h,\ \ x^h \in P(x^h)\ \exists h\}.$$

事実１０．２．１：配分 $(x^1,\ldots,x^H, y^1,\ldots,y^F) \in C^1 \times \ldots \times C^H \times Y^1 \times \ldots \times Y^F$ が以下の条件をみたすならば，パレート最適である.

$$P(x^1,\ldots,x^H) \cap Y = f\ .$$

$$\sum_{h=1}^{H} x^h \le \sum_{f=1}^{F} y^f\ .$$

$P(x^1,\ldots,x^H)$ と $Y$ が分離されている．⇒ 分離定理の利用

### １０．２．分離定理再論

分離定理１０．２．１：二つの閉凸集合 $A \subset R^n$ と $B \subset R^n$ の片方が内点をもち，内点の集合ともう片方の共通部分が空ならば，ある $p \in R^n$，$p \ne 0$，と $k \in R$ が存在し以下が成立する.

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B, \qquad px \le k \le py\ .$$

とくに $x \in \mathrm{int}\ A$，$y \in \mathrm{int}\ B$ ならば，厳密な不等号が成り立つ.

---

[*] Copy Right © 1999 矢野 誠.

## １０．３．パレート最適配分と純粋所得移転を伴う疑似均衡

所得移転を伴う均衡とは次の条件を満たす配分と所得移転方式と価格

$$(x^1,\ldots,x^H,y^1,\ldots,y^F,m^1,\ldots,m^H,p)$$

のことである．

１．$\forall h\in\{1,\ldots,H\}$，　$x^h\in C^h$，　$px^h\le m^h$，　$zP^hx^h \;\Rightarrow\; z>m^h$ ．

２．$\forall f\in\{1,\ldots,F\}$，　$y^f\in Y^f$，　$y\in Y^f \;\Rightarrow\; py^f\ge py$ ．

３．　$\sum_{h=1}^{H}x^h=\sum_{f=1}^{F}y^f$ ．

純粋所得移転：　$m^1,\ldots,m^H$，　$\sum_{m=1}^{H}m^h=\sum_{f=1}^{F}py^f$ ．

所得移転を伴う疑似均衡：

$$(x^1,\ldots,x^H,y^1,\ldots,y^F,m^1,\ldots,m^H,p)$$

１．$\forall h\in\{1,\ldots,H\}$，　$x^h\in C^h$，　$px^h\le m^h$，　$zP^hx^h \;\Rightarrow\; pz\ge m^h$ ．

２．$\forall f\in\{1,\ldots,F\}$，　$y^f\in Y^f$，　$y\in Y^f\Rightarrow py^f\ge py$．

３．　$\sum_{h=1}^{H}x^h=\sum_{f=1}^{F}y^f$ ．

仮定：　$C^h$，閉凸集合，下から有界，$\mathrm{int}\sum_{h=1}^{H}C^h\ne f$ ．

仮定 C：$P^h(x)$ 凸，$C^h$ において相対開集合

仮定 Y：$Y^f$，凸閉集合，$Y$，凸閉集合，$\mathrm{int}\sum_{f=1}^{F}Y^f\ne f$

仮定 M：単調性（monotonicity）　$x\in C^h$ かつ $z>x$ ならば $zP^hx$ である．

ここで $(z_1,\ldots,z_N)>(x_1,\ldots,x_N)$ は $z_n\ge x_n$，　$n=1,\ldots,N$，かつ $z\ne x$ を意味する．また，集合 $X\subset R^N$ の相対開集合 $U_X$ とは，集合 $R^N$ の開集合 $U$ が存在して，　$U_X=U\cap X$ となる集合のことである．

宿題：集合 $X\subset R^N$ の相対開集合ではあるが，もとの集合 $R^N$ の開集合ではないような集合の例を図示せよ．

定理１０．３．１：以上の四つのもとでは，どのパレート最適配分も所得移転を伴う疑似均衡である．

## １０．４．定理１０．３．１の証明と分離定理

配分 $(x^1,...,x^H,y^1,...,y^F)$ をパレート最適であるとせよ．定義から，$\sum_{h=1}^{H} x^h \le \sum_{f=1}^{F} y^f$ なので，ある $n$ について $\sum_{h=1}^{H} x_n^h < \sum_{f=1}^{F} y_n^f$ が成立すると，単調性の仮定から，$(x^1,...,x^H,y^1,...,y^F)$ よりも，パレートの意味で，望ましい実行可能な配分を作り出すことができる．したがって，

$$\sum_{h=1}^{H} x^h = \sum_{f=1}^{F} y^f \qquad (1)$$

でなくてはならない．つまり，均衡条件の iii が成立する．また，$P(x^1,...,x^H) \cap Y = f$ だから $p \in R^n,\ p \ne 0$，と $k \in R$ が存在して，

$$\forall x \in P(x^1,...,x^H), \forall y \in Y,\ \ px \ge k \ge py. \qquad (2)$$

ここで $m^h = px^h$，　$h = 1,...,H$，とせよ．そうすると，(1) から，

$$p\sum_{h=1}^{H} x^h = \sum_{h=1}^{H} m^h = p\sum_{f=1}^{F} y^f \le k$$

である．もし $p\sum_{h=1}^{H} x^h < k$ ならば，仮定 LNS によって，　$\Delta x^h \ne 0$ が存在し，$x^h + \Delta x^h \in P^h(x^h)$，かつ

$$p\sum_{h\ne 1}^{H} x^h + p\Delta x^h < k \quad .$$

これは $x + \Delta x^h \in P(x^1,...,x^H)$ に矛盾する．したがって，

$$p\sum_{h=1}^{H} x^h = \sum_{h=1}^{H} m^h = p\sum_{f=1}^{F} y^f = k$$

である．したがって，　$\forall z \in Y$ についても，

$$p\sum_{f=1}^{F} y^f \ge pz$$

である．ここで，　$z \in Y$ なので，　$z = \sum_{f=1}^{F} z^f$，$z^f \in Y^f$ なる $z^f$，$f = 1,...,F$ が存在するので，$f$ 以外の $f'$ について $z^{f'} = y^{f'}$ を選ぶと，どんな $z^f \in Y$ についても，

$$p\ \ y^f \ge pz^f$$

が成立する．したがって，均衡の条件 ii が成立することがわかる．さらに，どんな $xP^h x^h$ についても，$(x^1,...,x^{h-1},x,x^{h+1},...,x^H) \in P(x^1,...,x^H)$ が成立するので，

$$px \ge px^h$$

である．したがって，疑似均衡の条件 i が成立する．証明終わり．

## １０．５．第二定理の証明と安価点の仮定

仮定 CP：　あたえられた価格 $p$ と配分 $(x^1,...,x^H,y^1,...,y^F)$ において，

$$\exists x \in C^h : px < px^h$$

がすべての $h$ について，成り立つ．

定理１０．５．１（厚生経済学の第二定理）：パレート最適配分をサポートする疑似均衡における価格と配分が仮定 CP を満足すれば，競争均衡である．

証明：もしパレート最適配分をサポートする疑似均衡を

$$e = (x^1,...,x^H,y^1,...,y^F,m^1,...,m^H,p)$$

とせよ．この疑似均衡が均衡でなければ，ある $h$ と $xPx^h$ が存在して，

$$px = px^h$$

が成立する．仮定 CP より，どの $h$ についても，$z \in C^h$ が存在して，

$$pz < px^h$$

が成立するので，$z$ と $x$ を結ぶ線分上の点 $w$ はどれも $w \in C^h$ であり，

$$pw < px^h \quad .$$

さて，$P(x^h)$ は相対開集合で $x \in P(x^h)$ なので，$w$ を十分 $x$ に近くとると，

$$w \in P(x^h) \text{ かつ } \quad pw < px^h.$$

これは $e$ が疑似均衡であることに矛盾する．証明終わり．