数理経済学第１１回（9911）[*]　　慶應義塾大学経済学部：矢野　誠

１１．一般均衡の存在

１１．１．均衡の存在問題

競争市場：　すべての経済主体が価格受容者

競争市場の均衡：

　与えられた市場価格のもとで,

　　１．消費者の最適化行動
　　２．生産者の最適化行動
　　３．市場での需給の一致

どのような条件のもとで均衡が存在するか.

もっとも簡単なケース

　　１．需要関数　$D = D(p)$
　　２．供給関数　$S = S(p)$
　超過需要関数　$e(p) = D(p) - S(p)$
　　３．需給一致：　$e(p) = 0$　.

均衡存在の条件：

　　A.　超過需要関数が連続.
　　B.　$\lim_{p\to\infty} e(p) < 0$　.
　　C.　$\lim_{p\to 0} e(p) > 0$　.

設問：条件 A，B，C のもとでは，均衡が存在することを中間値の定理を使って証明せよ.

---

[*] Copy Right © 1999 矢野 誠.

１１．２．長期の一般均衡モデル

経済： $(Y, C^1, ..., C^H, R^1, ..., R^H)$, $Y = \sum_{a=1}^{A} Y^a$

$(p, y, x^1, ..., x^H)$ **が均衡であるとは,**

１． $x^h \in C^h$, $px^h = 0$, $z \in P^h(x^h) \Rightarrow pz > px^h$.
２． $y \in Y$, $0 = py \geq pz \quad \forall z \in Y$.
３． $y = \sum_{h=1}^{H} x^h$.

注意１：このモデルを長期均衡のモデルというのは,
$py = 0$ **ゼロ利潤条件**
を均衡の定義に含むので.

注意２： x^h **は交換のベクター**

仮定１． $Y \subset R^n$ **：** 0 **を頂点とする閉凸錘**

仮定２． $Y \cap R^n = \{0\}$, $\operatorname{int} Y \neq f$.

仮定３． C^h **：凸，閉，下から有界**

仮定４． R^h **：推移的，反射的，完備，** R^h **のグラフは閉**
$R^h(x)$ **：厳密に凸．もし** $P^h(x) \neq f$ **ならば,**
$R^h(x) = clP^h(x)$ *relative to* C^h .

（厳密な凸性ははずすこともできる．証明を簡単にするために,
以下でははずさない.）

仮定５．もし $x^h \in C^h$ **で** $\sum_{h=1}^{H} x^h \in Y$,
どの h **についても,** $z^h \in C^h$ **が存在して,** $z^h P^h x^h$.

仮定６．どの h **についても,** $C^h \cap \operatorname{int} Y \neq f$.

１１．３．均衡の存在証明と不動点定理

不動点とは：

x は関数 f の不動点 $\Leftrightarrow$ $x = f(x)$

不動点定理： 不動点が存在するために f が満たすべき性質を探し，
不動点の存在を示す．

中間値の定理も不動点定理の一種である．

定理１１．１： もし， $f : R \to R$ で，次の条件を満たすならば，
f は不動点を持つ．
(1) f が連続，(2) $\exists x'$ ： $x' > f(x')$， (3) $\exists x'$ ： $x'' < f(x'')$ ．

証明： $F(x) = x - f(x)$ とすると， F は連続， $F(x') > 0$， $F(x'') < 0$．したがって，中間値の定理から $F(x) = 0$ なる x が存在する．この $F(x) = 0$ は $x = f(x)$ を意味するので， f は不動点をもつ．証明おわり．

連続関数の不動点：

定理１１．２（ブラウワーの不動点定理） $X \subset R^n$ がコンパクトかつ凸で，
$f : X \to X$ が連続 ならば， f は不動点を持つ．

以下で利用するのは，上半連続対応に関する角谷の不動点定理

１１．４．角谷の不動点定理

対応と関数

対応：　$X \subset R^n$,　$F : X \to R^n$,　$F(x) \subset R^n$
関数：　$X \subset R^n$,　$f : X \to R^n$,　$f(x) \in R^n$

対応の不動点とは　$x \in F(x)$　なる　x　のこと.

連続関数：　$f : X \to R^n$　が連続

$$x^i \in X, \quad x^i \to x \in X \quad \Rightarrow \quad f(x^i) \to f(x)$$

上半連続対応：　$F : X \to R^n$　が上半連続対応

$$x^i \in X, \quad x^i \to x \in X, \quad f^i \in F(x^i), \quad f^i \to f \quad \Rightarrow \quad f \in F(x)$$

（参考：下半連続対応：　$F : X \to R^n$　が下半連続対応

$$x^i \in X, \quad x^i \to x \in X, \quad f \in F(x)$$
$$\Rightarrow \ \exists f^i \in F(x^i) : \quad f^i \in F(x^i), \quad f^i \to f \quad .)$$

点対凸対応：　$F(x)$　が常に凸集合

定理１１．３（角谷の不動点定理）　$X \subset R^n$　はコンパクト凸集合で,
$F : X \to X$　が上半連続な点対凸集合の対応ならば　F　は不動点を持つ.

均衡の存在証明の方針

１．価格の集合として，コンパクト凸集合をとる．　$\overline{P}$　とおく.
２．　$\overline{P}$　からそれ自身への上半連続な点対凸対応　$F : \overline{P} \to \overline{P}$　を作る.
３．角谷の定理により，この対応の不動点　$p^* \in F(p^*)$　をみつけ，それが均衡であることを証明する.

１１．５．均衡の存在証明のスケッチ

二財（$n=2$）のケースを図に基づいて証明する．

財空間：　R^n,　$n=2$

生産集合　（Y）　についての仮定：

仮定１．　$Y \subset R^n$　：　0　を頂点とする閉凸錘
凸錘とは　$y \in Y$　かつ　$a \geq 0$　ならば　$ay \in Y$　であるような集合
収穫一定を仮定している．

仮定２．　$Y \cap R^n = \{0\}$
これは，投入なしで生産することはできないという仮定である．

仮定３．　$\mathrm{int}\, Y \neq f$　．

ステップ１：価格の集合を導入する

$P = \{p \in R^n : py \leq 0,\ y \in Y\}$
P　は生産集合内のどのベクターとも９０度以上の角度を持つベクターの集合である．　Y　の双対凸錘と呼ばれる．

価格の集合：　ある　$\bar{y} \in \mathrm{int}\, Y$　をとって，
$\bar{P} = \{p \in P :\ p\bar{y} = -1\}$

図１：参照

補題１１．１．　$\bar{P}$　は　R^n　のコンパクト凸部分集合．
証明：図１から明らか．

ステップ２：需要関数を導入する

需要関数：

$$f^h(p)=\{x^h \in C^h : px^h = 0,\ \ z \in P^h(x^h)\ \Rightarrow\ pz > px^h\}\quad .$$

仮定４： $f^h : \overline{P} \to C^h$ **は連続関数である．**

連続性は選好の仮定から導出できるものであるが，とりあえず，連続という仮定をおいて議論を進める．

ステップ３：無駄のない生産と帰属価格の関係を使う

∂Y **：** Y **の境界の集合としよう．**
$y \in \mathrm{int}\, Y$ **ならば，** y **には無駄が存在する．** y **のなかの投入にあたる要素の値を一定として，産出にあたる要素の値を増加させることができるので．**

$H : \partial Y \to \overline{P}$ **：** $H(y)=\{p \in \overline{P} : py = 0\}$ **．**

図２参照

補題１１．２： H **は上半連続の点対集合対応である．**

証明：図２から明らか．

ステップ４：不動点を見つける

$C=\sum_{h=1}^{H} C^h$ **とせよ．**

$a(x)=\max a \ \ s.t.\ ax+(1-a)\bar{y}\in Y$

補題１１．３： $a: C\setminus \mathrm{int}\, Y \to \partial Y$ **が定義できて，連続である．**
証明：宿題

$$g(x)=a(x)x+(1-a(x))\bar{y}$$

図３参照

$f(p)=\sum_{h=1}^{H} f^h(p)$ **：集計需要関数**

$F(p)=H(g(f(p)))$ **：**

補題１１．４： $F:\bar{P}\to\bar{P}$ **は上半連続な凸対応である．**
証明：後回し

角谷の定理から， F **の不動点が存在する．** p^* **が存在して，**

$$p^*\in F(p^*)$$

が成立する．

ステップ５：不動点が均衡であることを示す

$x^{*h} = f^h(p^*)$ ， $y^* = g(f(p^*))$ とすると，
$(y^*, x^{*1}, ..., x^{*H}, p^*)$ が均衡である．

１： $x^{*h} = f^h(p^*)$ なので， x^{*h} が均衡の条件１を満たすことがわかる．需要関数の定義から，

$$p^* x^{*h} = 0 \tag{1}$$

であることに注意せよ．

２： $y^* = g(f(p^*))$ より $p^* \in H(y^*)$ であるから，

$$p^* y^* = 0 \tag{2}$$

である．また， $p^* \in P$ なので， $y \in Y$ ならば， $p^* y \le 0$ を意味するので，均衡の条件２を y^* が満たすことがしめせた．

３： $x^* = f(p^*)$ とおくと， $y^* = g(x^*)$ である．したがって， g の定義から，

$$y^* = a(x^*)x^* + (1 - a(x^*))\bar{y} \tag{3}$$

である．両辺に p^* を書けると，

$$p^* y^* = a(x^*) p^* x^* + (1 - a(x^*)) p^* \bar{y}$$

である．ここで， (1) より， $p^* x^* = 0$ であり， $p^* \in \bar{P}$ から $p^* \bar{y} = -1$ である．したがって，(2) より，

$$0 = 1 - a(x^*)$$

である．したがって， (3) より $y^* = x^*$ となり，均衡の条件３が満たされることがわかる．証明終わり