数理経済学 Ia 講義ノート：コンパクト集合

尾崎裕之 *

2023 年 10 月 21 日

0　前口上

本稿では「コンパクト集合」について説明する。主に 3 つのことを解説する。

(1) コンパクト集合の定義。

(2) 有限次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^\ell$ にユークリッド位相（須田先生の講義で扱った位相のこと）を入れたときのコンパクト集合の特徴づけ。

(3) 3 つの異なるコンパクト性の概念（コンパクト性そのもの (compactness)、limit point compactness*1、点列コンパクト (sequential compactness)）が、上の (2) の場合にはすべて同値となること。

本講義の残りでは、$\ell \in \mathbb{Z}_{++} := \{1, 2, \ldots, \}$ とし、（何も断らないときは常に）$\mathbb{R}^\ell$ にはユークリッド位相が入っているものとする。

1　コンパクト集合の定義

定義 1（開被覆）　集合 $E \subset \mathbb{R}^\ell$ の「開被覆 (open cover, open covering)」とは、$\mathbb{R}^\ell$ の開部分集合からなる族、$\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$、で

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \tag{1}$$

となるもののことを言う。ただしここで、I は任意の（可算とは限らない）インデックスの集合である。

定義 2（コンパクト集合）　集合 $E \subset \mathbb{R}^\ell$ は、次の条件が成立するときに、「コンパクト集合 (compact set)」と呼ばれる：集合 E の任意の開被覆について、有限部分被覆 (finite subcover) が存在する。つまり、(1) が成立しているときに、有限個のインデックス $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I$ が存在

* 慶應義塾大学経済学部

*1 定訳は見つけられなかった。

して、

$$E \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$$

となる。

次の結果は定義から直ぐに従う。（講義で説明）

定理 1　有限集合はコンパクト。

もう少し骨のある例を幾つか挙げる。

例 1　集合 $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{++}\}$ はコンパクトではない。

証明： 任意の正の整数 n について、$x_n := 1/n$ と定義すると、上の集合は $E := \{x_1, x_2, \ldots\}$ と書ける。実数 ε_n を $\varepsilon_n < 1/n - 1/(n+1)$ となるような任意の実数とし、中心が x_n で半径が ε_n である開球を考えると、これらの開球からなる族は集合 E の開被覆であるが、これから有限部分被覆を取ることはできない。 □

このことから、可算無限集合はコンパクトではあり得ないように思えるが、そうとは限らない。

例 2　集合 $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{++}\} \cup \{0\}$ はコンパクト。（何故か？ 講義で解説。）

■重要な注意（相対位相）：　以下では、ただ単に「開集合」と言ったときには、「$\mathbb{R}^\ell$ の位相で（$\mathbb{R}^\ell$ 上で）開である」ことを指すものとする。気を付けなければならないのは、$X \subset Y \subset \mathbb{R}^\ell$ となっているときである。「集合 X が開」というのは、それが「$\mathbb{R}^\ell$ 上で開」ということであり、X が Y の相対位相で開であることを意味しない。後者の場合には、はっきりと「X は Y の相対位相で開」と書く。相対位相についてはしっかり理解していると思うが、上の 2 つの主張は同じではない。例えば、上のケースで、Y が $\mathbb{R}^\ell$ 上で開であろうとなかろうと、Y は Y 上の相対位相では開である（と同時に、閉でもある）。以上述べたことは、閉集合についても同様に当てはまる。

定理 2　集合 $\mathbb{R}^\ell$ 上のコンパクト集合は閉。

証明： 集合 K を $\mathbb{R}^\ell$ 上の任意のコンパクト集合とする。集合 K^c が $\mathbb{R}^\ell$ の開部分集合であることを証明すればよい。

そこで、K^c から任意の点 p を取ってこよう。点 $q \in K$ が与えられたとき、V_q と W_q のそれぞれを、p、q を中心とし、半径が $\|p - q\|/2$ 未満であるような開球と定義する。（V_q と書いたが、これは V_p の誤りではない。）

すると、次のようなことが分かる。先ず、$K \subset \cup_{q \in K} W_q$ であることと、K がコンパクトであることから、有限個の点 $q_1, \ldots, q_n \in K$ が存在して

$$K \subset W_{q_1} \cup \cdots \cup W_{q_n} =: W$$

となる。次に、$V := V_{q_1} \cap \cdots \cap V_{q_n}$ と定義すると、V は p を含む開集合となり、しかも、$V \cap W = \phi$ である（何故か？）。これらから直ちに $p \in V \subset W^c \subset K^c$ が従う。

結局、K^c 上の任意の点 p がこの集合の内点であることが示せたので、K^c は開集合となり、証明完了。 □

上で書いた注意より、次の定理内で「閉部分集合」と言っているのは、「$\mathbb{R}^\ell$ の閉部分集合」を意味している。

定理 3 コンパクト集合の閉部分集合はコンパクト。

証明： 任意の $\mathbb{R}^\ell$ 上の閉集合 F と任意のコンパクト集合 K で、$F \subset K \subset \mathbb{R}^\ell$ となっているものを取ってくる。集合 F がコンパクトであることを証明すれば良い。

そこで、F の任意の開被覆を取ってきて、$\{V_\alpha\}$ と呼ぼう。これに F^c を加えた（新しい）集合族を考えると、K の開被覆が得られる（何故か？）。これを Ω と呼ぼう。集合 K はコンパクトなので、Ω から取った有限部分被覆 Φ が存在して、K を、従って、F を覆うことができる。もし、Φ に F^c が含まれていた場合には、これを Φ から除いてしまっても依然として F を覆うことができる。このように作ったものは $\{V_\alpha\}$ から取った有限部分被覆になっているので、証明が終わった。 □

2 ℓ-細胞とその性質

一般的に、空間 $\mathbb{R}^\ell$ の任意の要素、即ち ℓ-次元ベクトルは、$\ell > 1$ であるときに、x ではなく $\boldsymbol{x}$ のようにボールド体で書かれるのが普通である。前節では結果が一般の位相空間で成立するものばかりであったのでこれをしなかったが、以下ではこの慣例に従う。

定義 3（ℓ-細胞 (ℓ-cell)） すべての $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ について $a^i < b^i$ であるような 2ℓ 個の実数が与えられたとき、すべての i について $a^i \leq x^i \leq b^i$ であるような $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ すべてからなる集合を「ℓ-細胞」と呼ぶ。

この定義から、1-細胞は「（閉）区間 (interval)」であり、2-細胞は「（閉）長方形 (rectangular)」であることがわかる。

次の定理が当たり前のことを言っているのではないことは、次の例からもわかる。（講義でしました。間違えましたが。）すべての正の整数 n について、$I_n := (0, 1/n]$ と定義すると、$(\forall n)\ I_n$ は非空で、かつ $I_n \supset I_{n+1}$ となっているが、$\cap_{n=1}^\infty I_n = \phi$ である。

定理 4 実数上の閉区間の列 I_n $(n \in \mathbb{Z}_{++})$ が与えられていて、$(\forall n)\ I_n \supset I_{n+1}$ が成立しているとする。このとき、$\cap_{n=1}^\infty I_n$ は非空である。

証明：すべての $n \in \mathbb{Z}_{++}$ について、$I_n := [a_n, b_n]$ と書くことにして、集合 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{++}}$ を E と呼

ぶことにしよう。すると、E は非空であり、かつ、上から（例えば、b_1 によって）有界であることが分かる。

ここから、$x := \sup E \in (-\infty, +\infty)$ が従う[*2]。というのも、E の非空性から $-\infty < x$ であるし[*3]、E は上から有界であるので、$x = \sup E$ が存在して、$x < +\infty$ となることが sup の定義から従うからである。

さて、任意の $m, n \in \mathbb{Z}_{++}$ を取ってくると、

$$a_n \leq a_{m+n} < b_{m+n} \leq b_m$$

となり、b_m は $E = \{a_n\}$ の上界であることになるが（直ぐ上で取ってきた n は任意であったので）、$x = \sup E$ であることと、sup の定義から、$(\forall m)\ x \leq b_m$ が成立する。さらに、$\sup E$ が E の上界に含まれることから、$(\forall m)\ a_m \leq x$ となる。結局、$x \in I_m$ が任意の m について成立することが分かったので、証明が終わった。 □

次の定理は、今証明したことを一般の ℓ-細胞に拡張するものである。

定理 5　実数 ℓ は正の整数とする。いま、ℓ-細胞の列 I_n $(n \in \mathbb{Z}_{++})$ が与えられていて、$(\forall n)\ I_n \supset I_{n+1}$ が成立しているとする。このとき、$\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ は非空である。

証明：集合 I_n は次の条件をすべて満たす点 $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^\ell)$ を集めてできていることがすぐに分かる（この辺りも、図を書くとわかりやすい。講義でします。記号上の注意：スーパースクリプトは座標を、サブスクリプトは集合列のインデックスを表す。）：

$$(1 \leq \forall j \leq \ell\,;\, n = 1, 2, 3, \ldots) \quad a_n^j \leq x^j \leq b_n^j\,.$$

これを使って、閉区間たち、$I_n^j := [a_n^j, b_n^j]$、を定義する。

すると、$(\forall n)\ I_n \supset I_{n+1}$ であることから、$(\forall j, n)\ I_n^j \supset I_{n+1}^j$ となるので、この閉区間たちに直前の定理をそのまま適用することができる。その結果、実数 x^{*j} $(1 \leq j \leq \ell)$ が存在して、

$$(1 \leq \forall j \leq \ell\,;\, n = 1, 2, 3, \ldots) \quad a_n^j \leq x^{*j} \leq b_n^j$$

となることが分かる。（$\cap_{n=1}^{\infty} I_n^j \neq \phi$ なのだから、$x^{*j} \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n^j$ とすればよい。）最後に、$\boldsymbol{x}^* := (x^{*1}, \ldots, x^{*\ell})$ と定義すれば、$(\forall n = 1, 2, 3, \ldots)\ \boldsymbol{x}^* \in I_n$ となって、証明終わり。 □

定理 6（ℓ-細胞のコンパクト性）　ℓ-細胞はコンパクトである。

[*2] 復習：集合 E の "sup" は、$(\forall z \in E)\ z \leq y$ となるような y 達（「上界」と呼ばれる）の中で、最小の実数のことを言う。その存在、並びに、それが上界に含まれることは実数の定義から従う。「最小上界 (least upper bound, l.u.b.)」とも言う。

[*3] 空集合の sup は $-\infty$ と定義される。$(\sup \phi := -\infty)$

証明： 集合 I を任意の ℓ-細胞とし、$\delta := \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$ と定義する。ただしここで、$\boldsymbol{a}=(a^1,\ldots,a^\ell)$、$\boldsymbol{b}=(b^1,\ldots,b^\ell)$ である。すると、

$$(\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in I)\quad \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{j=1}^{\ell}(x^j-y^j)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{j=1}^{\ell}(a^j-b^j)^2\right)^{1/2} = \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| = \delta$$

が成立する。($(\forall j)\ |x^j-y^j|\le|a^j-b^j|$ であるから。)

定理を背理法により証明する。そこで、I の開被覆 $\{G_\alpha\}$ で、それに含まれるどのような有限部分被覆を選んでも I を覆い続けることができないようなものが存在すると仮定する。ここから、矛盾を導く。

すべての j について $c_j := (a_j+b_j)/2$ と定義し、閉区間 $[a_j,c_j]$ と $[c_j,b_j]$ を考える。すべての j についてこれらの 2 つの内から一方を選んで ℓ-細胞を新たに作ると、これらは 2^ℓ 個の ℓ-細胞からなる集合族となり、この集合族の和集合は I と一致する。この集合族を構成する ℓ-細胞の内、少なくとも 1 つの ℓ-細胞は $\{G_\alpha\}$ のいかなる有限部分被覆を取ってきても覆うことができない（背理法の仮定による。仮にすべての ℓ 細胞についてそれができるとしたら、I 自身が有限部分被覆に覆われてしまい、背理法の仮定と矛盾する。)。この ℓ-細胞を I_1 と呼ぼう。

さらに、I_1 の各座標上の閉区間を同様の仕方で 2 つの区間に分けて、... という作業を繰り返していくと、以下の条件を満たす ℓ-細胞の列 $\{I_n\}$ を得る（この辺り、$\ell=2$ として図を描いてみると分かりやすい。講義でします。)：

(a) $I\supset I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$；

(b) $(\forall n)$ I_n は $\{G_\alpha\}$ のいかなる有限部分被覆を取ってきても覆うことができない；

(c) $(\forall n)(\forall \boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n\in I_n)$ $\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_n\|\le 2^{-n}\delta\,.$

(a) と (b) は $\{I_n\}$ の作り方から自明。(c) は以下のようにノルムの定義から従う：

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_n\| &= \left(\sum_{j=1}^{\ell}\left(x_n^j-y_n^j\right)^2\right)^{1/2}\\ &\le \left(\sum_{j=1}^{\ell}\left(\frac{b^j-a^j}{2^n}\right)^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{j=1}^{\ell}\left(b^j-a^j\right)^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2^n}\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| = \frac{\delta}{2^n}\,.\end{aligned}$$

(a) と上の定理 2 から、ある $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^\ell$ が存在して、$(\forall n)$ $\boldsymbol{x}^*\in I_n$ となるものが存在する。また、開被覆 $\{G_\alpha\}$ は I_n を覆うので、$(\exists\alpha)$ $\boldsymbol{x}^*\in G_\alpha$ でなければならない。集合 G_α は開であり、$\boldsymbol{x}^*\in G_\alpha$ となっていることから、（十分小さな）$r(>0)$ を取ってきて、

$$(\forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^\ell)\quad \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\|<r\ \Rightarrow\ \boldsymbol{y}\in G_\alpha$$

となるようにすることができる。今、n を非常に大きく、具体的には、$2^{-n}\delta<r$ となるくらい大きくとってみよう。するとおかしなことが起こる。というのも、(c) によって、I_n の任意の点は、

n が非常に大きいときには $\boldsymbol{x}^*$ と同じく、G_α 上にあることになる（何故か）。即ち、I_n は 1 つの開被覆 G_α にすっぽりと覆われてしまう。これは先に得た結論 (b) と明らかに矛盾しているので、帰納法の過程が誤りであったことが分かり、証明が終了。 □

3　復習：集積点、孤立点、有界集合

定義 4（集積点）　集合 E が与えられているとき、点 p を中心とする任意の開球が、$q \neq p, q \in E$ となる点 q を含むとき、点 p を集合 E の「集積点 (limit point, accumulation point)」という。

定義 5（孤立点）　点 $p \in E$ について、p が E の集積点でないとき、p を E の「孤立点 (isolation point)」という。

例 3　集合 $E \subset \mathbb{R}$ を $E := [0,1) \cup \{2\}$ によって定義すると、E の集積点と孤立点は何か？

定義 6（有界集合）　集合 E は次の条件が成立するとき、「有界集合 (bounded set)」である：

$$(\exists q \in E)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall p \in E) \quad \|p - q\| < M$$

注意：集合の有界性の定義はノルム（より一般的には「距離」）を用いているため、集合の有界性は位相的性質（開集合のみを用いて定義される性質）ではない。

4　Limit-point コンパクト

定義 7（Limit-point コンパクト集合）　集合 K の任意の無限部分集合（部分集合で、その要素が無限個であるもの）E が、E の集積点を少なくとも 1 つ K 上に持つとき、集合 K は「limit-point コンパクト」であるという。

定理 7　コンパクト集合は limit-point コンパクトである。

証明：背理法でおこなう。よって、集合 K は limit-point コンパクトではないと仮定し、すべての $q \in K$ について、q の開球（V_q と呼ぶ）で、$q \in E$ のときには q のみを、それ以外のときには E の点を一切含まないものが存在する。

集合 E は無限集合であり、V_q はそれぞれ、高々 1 つの E の点を含むに過ぎないので、$\{V_q\}$ から有限部分被覆を選んで E を覆い続けることは不可能である。集合族 $\{V_q\}$ は K の開被覆でもあり、$E \subset K$ であることから、K がコンパクトでないことがわかり、証明が終わった。 □

注意：距離空間においては、この定理の逆も成立する。即ち、距離空間においては、コンパクト性と limit-point コンパクト性は同値となる。上の定理の逆の証明は難しくはないが少々時間がかかるので講義では省略します。

5 Heine-Borel の定理

定理 8（Heine-Borel） 有限次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^\ell$ にユークリッド位相が装備されているとき、集合 $E \subset \mathbb{R}^\ell$ についての次の 2 つの主張は同値である。

(a) E は有界かつ閉である。

(b) E はコンパクトである。

証明：(a) ⇒ (b). 集合 E が有界であることから、適当な ℓ-細胞を選べば、E はその部分集合となる。任意の ℓ-細胞がコンパクトであることと、コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトであることから、結果が従う。

(b) ⇒ (a). 集合 E がコンパクトならば、上の定理によって E は limit-point コンパクトである。以後、E が limit-point コンパクトであることを仮定し、(a) を証明する。

（E の有界性）集合 E が有界でないならば、E は次のような点列

$$(\forall n = 1, 2, \ldots) \quad \|\boldsymbol{x}_n\| > n$$

を含まなければならないが、無限集合 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots)$ は $\mathbb{R}^\ell$ 上に（従って、E 上に）集積点を持たない。故に E は有界でなければならない。

（E の閉性）集合 E が閉ではないと仮定すると、閉集合の性質から、E の集積点で、E に含まれない点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^\ell$ が存在する。すべての $n = 1, 2, \ldots$ について、$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\| < 1/n$ を満たすような E 上の点列からなる集合 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots\}$ を考えると、これは（一般性を欠くことなく）無限集合となり、その唯一の集積点は $\boldsymbol{x}_0$ である。このような点列は、$\boldsymbol{x}_0$ が E の集積点であることから必ず存在し、集積点が一意であることは、

$$(\forall \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}_0) \quad \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\| \geq \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}\| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}\|$$

が有限個を除いた無限個の n について成立することからわかる。

集合 E は limit point コンパクトなので、S の唯一の集積点である $\boldsymbol{x}_0$ は E 上になければならないが、仮定により $\boldsymbol{x}_0 \notin E$ である。これは矛盾なので、E は閉でなければならない。 □

闇雲に「有界閉集合はコンパクト」と思ってはいけない。次の例を見よ。

例 4（Rudin, p.44） 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ と書き、$\mathbb{Q}$ に $\mathbb{R}$ 上のユークリッド位相の相対位相を装備する。その上で、次によって定義される集合 E を考える：

$$E := \left\{ p \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \sqrt{2} < p < \sqrt{3} \right\}$$

集合 E は明らかに有界であり（ユークリッドの距離で）、$\mathbb{Q}$ 上の相対位相で閉である。というのも、$E = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$ であり、$[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ は $\mathbb{R}$ 上の閉集合であるからである。（相対位相の定義並びに諸性質を思い出すこと。）

しかし、集合 E は $\mathbb{Q}$ 上の相対位相でコンパクトではない。次で定義される集合 E の開被覆を考えてみよう：

$$\left\{\left(\sqrt{2}+\frac{1}{n}, \sqrt{3}-\frac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

実際に、この被覆を構成する個々の集合は $\mathbb{Q}$ 上の相対位相で開である。しかし、有限部分被覆を取ることはできない。（コンパクト性はどの相対位相を考えるかに依存しないので（授業でチラッと言ったこと）、このパラグラフ冒頭の「$\mathbb{Q}$ 上の相対位相で」は実は不要であった。） □

定理 9（Weierstrass）　有限次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^\ell$ の任意の有界無限集合は $\mathbb{R}^\ell$ 上に集積点を持つ。

証明：当該集合は有界なので、適当な ℓ-細胞を選べば、その部分集合となる。任意の ℓ-細胞はコンパクトであり、故に、limit-point コンパクトである。当該集合はその無限部分集合であるので、最前の定理から結果が従う。 □

6　点列コンパクト

定義 8（**点列コンパクト** (Sequential Compactness)）　集合 K 上の任意の点列が、K のある点に収束する部分列を持つとき、集合 K は「点列コンパクト」であるという。

定理 10　コンパクト集合は点列コンパクトである。

証明：当該コンパクト集合を E とし、点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ を任意に取る。この点列の各点の取る値、p_n、が有限個しかない場合は定理は明らかである。（何故か）

そこで、そうではない、と仮定すると、$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は E の無限部分集合となる。集合 E はコンパクトなので、limit-point コンパクトである。故に、最前の定理から、点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は E 上に集積点を持つ。この点を p_0 と呼ぶ。

すると、$\|p_{n_1} - p_0\| < 1$ となる n_1 が存在し、さらに、集積点の定義から、$\|p_{n_i} - p_0\| < 1/i$ かつ $n_{i+1} > n_i$ となるような整数列、$n_1, n_2, \ldots$、が存在することが分かる。点列 $\{p_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ は明らかに p_0 に収束するので、証明が終わった。 □

注意：距離空間においては、この定理の逆も成立する。即ち、距離空間においては、コンパクト性と点列コンパクト性は同値となる。上の定理の逆の証明は若干タフです。（講義では省略します）

7　まとめと参考文献

今回扱った内容は、より一般的には「位相数学 (topology)」と呼ばれるが、本講義はそれを有限次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^\ell$ のユークリッド位相に限って述べているので、非常に特別な場合のみを

扱っていることになる。この特殊ケースについての古典中の古典は

Rudin, Walter (1976): *Principles of Mathematical Analysis* (Third Edition), McGraw-Hill.

である。古典とは言え、いまだにこれで十分と言えるほどに優れた教科書である。このノートもこれに多くを負っている。本稿を書くために同書の最初の部分を読み直しましたが、経済数学では普通は省略してしまう「実数体 (Real Field)」や「複素数体 (Complex Field)」の群論的構成など、今読んでも痺れます。理論経済学を多少本格的に勉強したいという向きは同書を精読すると良いでしょう。

このノートで省略した、距離空間においては limit-point コンパクト性と点列コンパクト性のどちらもがコンパクト性を含意することの証明は、前者は Rudin に（練習問題として）、後者は、

Munkres, J. R. (1975): *Topology: A First Course*, Prentice Hall.

に、それぞれ載っています。

Rudin は数学の本であり、経済数学の本ではない。初級レベル（本講義のレベル）の経済数学の教科書はそれこそ星の数ほどあるのであろうが、自信を持ってお勧めできるものはない。必要に応じて数学の文献に当たるのがよいと私は思うが、考え方は人それぞれであろう。（Hammond, P., et al. *Essential Mathematics for Economic Analysis* の最初の版は非常に良かった。 おそらく、それが出た時点ではベスト。現在の版（第 6 版）については読んでいないのでよくわかりません。）