数理経済学 I 前期試験問題「問題 B」：回答例

尾崎裕之

2023 年 10 月 28 日

■問題 1: 集合 E はある位相空間の部分集合であるとする。（もっと具体的に、 ユークリッド位相が $\mathbb{R}^\ell$ に搭載されており、$E \subset \mathbb{R}^\ell$ と考えてもらってもまったく構わない。次の問題 2 でも、同様。）尾崎の講義で導入した位相空間上のコンパクト集合 E の定義を、講義で行ったように「開被覆」を用いて丁寧に記述せよ。

解答例：開集合からなる任意の族で集合 E を覆うことができているとき、これを集合 E の開被覆と呼ぶ。任意の E の開被覆が与えられたとき、これから有限個の開集合を残して、後のものをすべて捨ててしまったとしても、依然として E を覆うようにすることができるとき、集合 E をコンパクトという。

■問題 2： 前問で導入した位相空間上の部分集合のコンパクト性を否定する条件を書け。すなわち、集合 E がコンパクト集合とはなり得ないための条件を書け。（つまり、問題 1 で示したコンパクト集合の定義の否定を書くこと。）

解答例：その中の有限個の開集合だけではどうしても集合 E を覆うようにすることができない E の開被覆を見つけてこられるとき、集合 E はコンパクト集合ではない。

■問題 3： 以下の 3 問では、実数の集合, $\mathbb{R}$, にユーリッド位相が搭載されていると仮定する。実数上の開区間 $(0,1)$ がコンパクト集合ではないことを、問題 2 で求めたコンパクト集合ではないことを示す条件を用いて証明せよ。

解答例：$I_n := \left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$ と定義すると、$(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ であるが（n が小さいとき I_n は空集合となるが、それは問題にはならない）、有限個の I_n で $(0,1)$ を覆うことはできない。よって、$(0,1)$ はコンパクトではない。

■問題 4： 今度は、実数上の半開区間 $[0,1)$ を考える。再び、問題 2 で求めたコンパクト集合ではないことを示す条件を用いて、半開区間 $[0,1)$ がコンパクト集合ではないことを証明せよ。

解答例：$I_n := \left(-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$ と定義すると、$[0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ であるが、有限個の I_n で $[0,1)$ を覆うことはできない。よって、$[0,1)$ はコンパクトではない。

（なお、以上 2 問の解答例は或る学生さんの解答が非常に美しかったので、そのまま採用しました。無断借用をお許しください。）

■問題 5： 7 月 10 日に行った講義の範囲まで（7 月 10 日付の講義ノート「コンパクト集合（2）」の最後のところまで）で証明した事実はすべて正しいとして（つまり、証明を一切繰り返すことなく）、実数上の閉区間 $[0,1]$ がコンパクト集合であることを示せ。

解答例：これはサービス問題。閉区間 $[0,1]$ は 1-細胞である。「ℓ-細胞はコンパクトである。」という、講義で証明をした定理から結論は明らかである。