第 9 章

直交行列と 2 次形式—3 次元の場合

9.1　直交行列

9.1.1　直交行列

3 次正方行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ が

$$ {}^tPP = P^tP = I_3 \tag{9.1} $$

を満たすとき P を**直交行列**と呼びます．この条件 (9.1) は 7.2 節（181 ページ）で学んだ 2 次元の場合と同様に次の定理 9.1 にあるように言い換えることができます．

定理 9.1. 3 次正方行列 P に対して次の条件 *(i), (ii), (iii), (vi)* は必要十分です．
(i) P は直交行列です．すなわち ${}^tPP = P^tP = I_3$ が成立します．
(ii) $(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \quad (\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3)$
(iii) $||P\vec{x}|| = ||\vec{x}|| \quad (\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3)$
(iv) $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ と列ベクトル表示をすると

$$ ||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = ||\vec{p}_3|| = 1, \quad (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0\ (i \neq j) $$

が成立します．

証明をする前に ${}^tPP = I_3$ の両辺の行列式を考えると

$$\det({}^tPP) = \det({}^tP)\det(P) = \det(P)^2$$

から

$$\det(P)^2 = \det(I_3) = 1$$

が従います．よって

$$\det(P) = \pm 1$$

であることが分かります．このことから ${}^tPP = I_3$ が成立すると P は正則で

$$P^{-1} = {}^tP$$

さらには

$$P{}^tP = I_3$$

も従います．以上をまとめると P が直交である必要十分条件は

$${}^tPP = I_3$$

であることが分かります．

Proof. **(i)⇒ (ii)** ${}^tPP = I_3$ であることを用います．すなわち

$$(P\vec{x}, P\vec{y}) = ({}^tPP\vec{x}, \vec{y}) = (I_3\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$$

と (ii) が導かれます．
(ii)⇒ (i) まず

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad (\vec{y} \in \mathbf{R}^3) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

であることに注意します．

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (P\boldsymbol{x}, P\vec{y}) = ({}^tPP\vec{x}, \vec{y})$$

から

$$(({}^tPP - I_3)\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

が任意の $\vec{y} \in \mathbf{R}^3$ に対して成立します．最初に述べた注意を用いると

$$({}^tPP - I_3)\vec{x} = \vec{0}$$

が任意の $\vec{x} \in \mathbf{R}$ に対して成立しますが、これは

$$ {}^tPP = I_3 $$

と必要十分です．

(ii)⇒ (iii)

$$ (\vec{x}, \vec{x}) = ||\vec{x}||^2 $$

ですから，(ii) において $\vec{x} = \vec{y}$ の場合を考えると (iii) が従います．

(iii)⇒ (ii)

$$ (\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}\left(||\vec{x}+\vec{y}||^2 - ||\vec{x}-\vec{y}||^2\right) $$

であることを用います．

(i)⇒ (iv)

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_3 \end{pmatrix} (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} ||\vec{p}_1||^2 & (\vec{p}_1, \vec{p}_2) & (\vec{p}_1, \vec{p}_3) \\ (\vec{p}_2, \vec{p}_1) & ||\vec{p}_2||^2 & (\vec{p}_2, \vec{p}_3) \\ (\vec{p}_3, \vec{p}_1) & (\vec{p}_3, \vec{p}_2) & ||\vec{p}_3||^2 \end{pmatrix} = I_3 $$

から

$$ ||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = ||\vec{p}_3|| = 1, \quad (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0\ (i \neq j) $$

が従います．

(iv)⇒ (i) **(i)⇒ (iv)** を逆にたどると分かります． □

3 次の直交行列全体の集合を**直交群**と呼んで

$$ O(3) := \{P \in M_3(\mathbf{R});\ {}^tPP = P{}^tP = I_3\} $$

と記します．

演習 9.1. $P_1, P_2 \in O(3)$ のとき $P_1P_2 \in O(3),\ P_1^{-1} \in O(3)$ を示しましょう．

9.1.2　回転行列

3 次の直交行列 $P \in O(3)$ を考えます．上で示したように

$$ \det(P) = \pm 1 $$

が従います．$R \in O(3)$ が

$$ \det(R) = 1 $$

を満たすとき R を 3 次の回転行列と呼びます．例えば

$$R_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

は z 軸の周りに角度 θ 回転する行列ですが，実際，$\det(R_0) = 1$ が成立しますから R_0 は 3 次の回転行列であることが分かります．

演習 9.2. **(i)** (9.2) の R_0 が 3 次の回転行列であることの条件を満たすことを示しましょう．

(ii) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$R_0\vec{a} \times R_0\vec{b} = R_0(\vec{a} \times \vec{b})$$

が成立することを示しましょう．

以下では

$$SO(3) := \{R \in O(3);\ \det(R) = 1\}$$

を 3 次の回転行列全体の集合*1とします．

演習 9.3. $R_1, R_2 \in SO(3)$ ならばその積について $R_1R_2 \in SO(3)$ が成立することを示しましょう．また $R_1^{-1} \in SO(3)$ も示しましょう．

以下では，3 次の回転行列 $R \in SO(3)$ を幾何学的に特徴付けます．

命題 9.1. $\det(R - I_3) = 0$ が成立します．従ってある $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$R\vec{x} = \vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

が成立します．

Proof.

$$\begin{aligned} \det(R - I_3) &= \det({}^tR - I_3) \\ &= \det(R^{-1} - I_3) \\ &= \det(R^{-1})\det(I_3 - R) \\ &= -\det(R - I_3) \end{aligned}$$

*1　特殊直交群 (Special Orthogonal Group) と呼びます．

から $\det(R - I_3) = 0$ が従います. □

演習 9.4. 上の命題 *9.1* において等号がなぜ成立するか考えましょう.

命題 9.1 の $\vec{x}$ を回転行列 R の軸と呼びます. 次の命題 9.2 では $R \neq I_3$ でない限り軸が 1 方向しかないことを示します.

命題 9.2. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3$ は 1 次独立であるとします. このとき

$$R\vec{x} = \vec{x}, \quad R\vec{y} = \vec{y}$$

が成立するならば $R = I_3$ が成立します.

Proof. $\vec{x}, \vec{y}$ が生成する 2 次元の部分空間を

$$V = \mathbf{R}\vec{x} + \mathbf{R}\vec{y}$$

と定めます. このとき

$$\vec{u} \in V \Longrightarrow R\vec{u} = \vec{u}$$

が成立します. 実際 $\vec{u} = c_1\vec{x} + c_2\vec{y}$ と表されますから,

$$R\vec{u} = c_1 R\vec{x} + c_2 R\vec{y} = c_1\vec{x} + c_2\vec{y} = \vec{u}$$

となるからです. 次に

$$z \in V^{\perp} \Longrightarrow R\vec{z} \in V^{\perp}$$

を示します. 実際, $\vec{u} \in V$ とすると $R\vec{u} = \vec{u}$ が成立しますから

$$\begin{aligned}(R\vec{z}, \vec{u}) &= (R\vec{z}, R\vec{u}) \\ &= (\vec{z}, \vec{u}) = 0\end{aligned}$$

から $Rz \in V^{\perp}$ が分かります.

$\mathbf{R}^3$ の部分空間 V の基底として $\vec{x}, \vec{y}$ が取れます. さらに $V^{\perp}$ の次元は 1 次元となりますので, $\vec{z} \neq \vec{0}$ である $\vec{z} \in V^{\perp}$ が $V^{\perp}$ の基底となります. このとき

$$R\vec{z} \in V^{\perp}$$

から

$$R\vec{z} = \gamma\vec{z}$$

を満たす $\gamma \in \mathbf{R}$ が存在します．$Q = (\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})$ は正則で

$$RQ = (\vec{x}\ \vec{y}\ \gamma\vec{z}) = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

から

$$Q^{-1}RQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

が成立します．この両辺の行列式を考えると

$$1 = \det(R) = \det(Q^{-1}RQ) = \gamma$$

から $R = I_3$ であることが分かります． □

以下では $R \in SO(3)$ が $R \neq I_3$ を満たすとします．単位ベクトル $\vec{u}_1$ が

$$R\vec{u}_1 = \vec{u}_1$$

を満たすとします．次に

$$\det(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3) = 1$$

を満たす $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ を取ります．一般に $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ に対して $(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3)$ は直交行列となりますから（定理 9.1），

$$\det(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3) = \pm 1$$

となります．もし $\det(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3) = -1$ のときは

$$U = (\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \ -\vec{u}_3)$$

と定義すると $\det(U) = 1$ となります．

この状況で

$$(R\vec{u}_2, \vec{u}_1) = (R\vec{u}_2, R\vec{u}_1) = (\vec{u}_2, \vec{u}_1) = 0$$

から $R\vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$ が分かります．同様に $R\vec{u}_3 \perp \vec{u}_1$ も成立します．従って

$$R\vec{u}_2, R\vec{u}_3 \in \mathbf{R}\vec{u}_2 + \mathbf{R}\vec{u}_3$$

から

$$RU = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

となります．ここで

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと

$$1 = \det(R) = \det(U^{-1}RU) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = \det(S)$$

から $\det(S) = 1$ が分かります．また $R_0 = U^{-1}RU$ が直交行列ですから

$$I_3 = {}^tR_0R_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{${}^tS$}} \\ 0 & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{S}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{${}^tSS$}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

従って ${}^tSS = I_2$ が分かります．同様に $R_0{}^tR_0 = I_3$ から $S^tS = I_2$ も従います．以上で

$$\det(S) = 1, \quad {}^tSS = S^tS = I_2$$

が成立しますから

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を満たす $\theta \in \mathbf{R}$ が存在します．以上で

$$U^{-1}RU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

であることが分かります．

定理 9.2. $R \in SO(3)$ が $R \neq I_3$ を満たすならば，ある $U \in SO(3)$ が存在して

$$U^{=1}RU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となります．

この定理 9.2 によると，$R \in SO(3)$ は軸による回転であることが分かります．

演習 9.5. **(1)** $\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を含む $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底 $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ を求めましょう．

(2) $\vec{f_1}$ を軸として $\frac{\pi}{3}$ 回転する行列 R を求めましょう．すなわち $U = (\vec{f_1}\ \vec{f_1}\ \vec{f_3})$ による回転座標変換をして表現すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる回転行列 R を求めましょう．

演習 9.6. $R = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ が回転行列であることを示し，軸を求めてどのような回転を与えるか示しましょう．

9.1.3　直交射影と鏡映

直交射影

V を $\mathbf{R}^3$ の 2 次元部分空間とします．V を指定するにはいろいろな方法がありますが，ここでは大きさが 1 のベクトル $\vec{p}_1 \in \mathbf{R}^3$ に垂直なベクトルの集合として表します．

$$V = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{p}_1) = 0\}$$

例えば

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ x - y + z = 0 \right\}$$

と表されます．

一般に V の正規直交基底を求めることができます．具体的に上の例で考えると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$$

とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から V の基底として

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を取ることができます．この 2 本のベクトルに対して Gram–Schmidt の直交化を用いると V の正規直交基底として

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が求まります．

$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の V への直交射影 $\vec{v}_0$ とは

$$\vec{v}_0 \in V, \quad (\vec{v} - \vec{v}_0) \perp V \tag{9.3}$$

を満たすベクトルです．具体的には，V の正規直交基底 $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ を用いると

$$\vec{v}_0 = (\vec{p}_2, \vec{v})\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{v})\vec{p}_3 \tag{9.4}$$

と表されます．実際，$\vec{p}_2, \vec{p}_3$ が V の基底ですから，

$$\vec{v}_0 = \eta \vec{p}_2 + \zeta \vec{p}_3$$

と表されます．このとき

$$(\vec{v} - \vec{v}_0, \vec{p}_2) = (\vec{v} - \vec{v}_0, \vec{p}_3) = 0$$

から

$$(\vec{v} - \eta\vec{p}_2 - \zeta\vec{p}_3, \vec{p}_2) = (\vec{v}, \vec{p}_2) - \eta(\vec{p}_2, \vec{p}_2) - \zeta(\vec{p}_3, \vec{p}_2) = (\vec{v}, \vec{p}_2) - \eta = 0$$
$$(\vec{v} - \eta\vec{p}_2 - \zeta\vec{p}_3, \vec{p}_3) = (\vec{v}, \vec{p}_3) - \eta(\vec{p}_2, \vec{p}_3) - \zeta(\vec{p}_3, \vec{p}_3) = (\vec{v}, \vec{p}_3) - \zeta = 0$$

から $\vec{v}_0$ が (9.4) と表されることが従います．このとき，V の任意のベクトル $\vec{q} \in V$ は

$$\vec{q} = c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3$$

と表されますから，$\vec{v}_0$ が

$$(\vec{v} - \vec{v}_0, \vec{p}_2) = (\vec{v} - \vec{v}_0, \vec{p}_3) = 0$$

を満たすことを用いると

$$(\vec{v}-\vec{v}_0,\vec{q})=(\vec{v}-\vec{v}_0,c_2\vec{p}_2+c_3\vec{p}_3)=c_2(\vec{v}-\vec{v}_0,\vec{p}_2)+c_3(\vec{v}-\vec{v}_0,\vec{p}_3)=0$$

から

$$\vec{v}-\vec{v}_0\perp V$$

も分かります．これから (9.4) で定める $\vec{v}_0$ が $\vec{v}$ の V への正射影であることが分かります．

次に行列を用いて $\vec{v}_0$ を表すことを考えます．$(\vec{p}_1,\vec{v})$, $(\vec{p}_2,\vec{v})$ を 1×1 行列，$\vec{p}_2,\vec{p}_3$ を 3×1 行列と考えれば

$$\begin{aligned}\vec{v}_0&=\vec{p}_2\cdot(\vec{p}_2,\vec{v})+\vec{p}_3\cdot(\vec{p}_2,\vec{v})\\&=\vec{p}_2\cdot{}^t\vec{p}_2\vec{v}+\vec{p}_3\cdot{}^t\vec{p}_2\vec{v}\\&=\left(\vec{p}_2\cdot{}^t\vec{p}_2+\vec{p}_3\cdot{}^t\vec{p}_2\right)\vec{v}\end{aligned}$$

と 3 次正方行列

$$Q=\vec{p}_2\cdot{}^t\vec{p}_2+\vec{p}_3\cdot{}^t\vec{p}_2$$

を用いて

$$\vec{v}_0=Q\vec{v}$$

と表せます．

今度は直交行列 $P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ を用いた座標変換で $Q\vec{v}$ がどのように表現されるか考えてみましょう．(9.4) を用いると

$$\begin{aligned}Q\vec{p}_1&=(\vec{p}_2,\vec{p}_1)\vec{p}_2+(\vec{p}_3,\vec{p}_1)\vec{p}_3=\vec{0}\\Q\vec{p}_2&=(\vec{p}_2,\vec{p}_2)\vec{p}_2+(\vec{p}_3,\vec{p}_2)\vec{p}_3=\vec{p}_2\\Q\vec{p}_3&=(\vec{p}_2,\vec{p}_3)\vec{p}_2+(\vec{p}_3,\vec{p}_3)\vec{p}_3=\vec{p}_3\end{aligned}$$

であることに注意しましょう．ここで

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

を座標変換

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi'\\\eta'\\\zeta'\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

を用いて変数変換すると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\\ \zeta'\end{pmatrix} &= {}^tP\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = {}^tPQ\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = {}^tPQP\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}\\ &= {}^tP(Q\vec{p}_1\ Q\vec{p}_2\ Q\vec{p}_3)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = {}^tPP\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．このことから

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\\ \zeta'\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}{}^tP\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

となり

$$Q = P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}{}^tP$$

とも表されます．さらに，これからも

$$\begin{aligned}Q\vec{v} &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^t\vec{p}_1\\ {}^t\vec{p}_2\\ {}^t\vec{p}_3\end{pmatrix}\vec{v}\\ &= (\vec{0}\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}{}^t\vec{p}_1\vec{v}\\ {}^t\vec{p}_2\vec{v}\\ {}^t\vec{p}_3\vec{v}\end{pmatrix}\\ &= \vec{p}_2{}^t\vec{p}_2\vec{v} + \vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\vec{v} = \left(\vec{p}_2{}^t\vec{p}_2 + \vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\right)\vec{v}\end{aligned}$$

と上で示した表現が再び導けます．

最後に上で求めた

$$\vec{v}_0 = (\vec{p}_2, \vec{v})\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{v})\vec{p}_3 = \left(\vec{p}_2{}^t\vec{p}_2 + \vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\right)\vec{v} \tag{9.5}$$

と異なる $\vec{v}_0$ の表現を求めましょう．

まず $\vec{v}$ の $\vec{p}_1$ 方向への直交射影を $\vec{v}_1$ とすると

$$\vec{v}_1 = (\vec{p}_1, \vec{v})\vec{p}_1$$

となります．以下では $\vec{v}-\vec{v}_1$ が $\vec{v}_0$ に他ならないことを導きます．そのために $\vec{v}-\vec{v}_1$ が条件 (9.3) を満たすことを示します．

$$(\vec{v}-\vec{v}_1,\vec{p}_1)=(\vec{v},\vec{p}_1)-(\vec{p}_1,\vec{v})\cdot(\vec{p}_1,\vec{p}_1)=(\vec{v},\vec{p}_1)-(\vec{p}_1,\vec{v})=0$$

から $\vec{v}-\vec{v}_1\in V$ が分かります．また

$$\vec{v}-(\vec{v}-\vec{v}_1)=\vec{v}_1$$

に注意すると

$$\begin{aligned}(\vec{v}_1,\vec{p}_2)&=(\vec{p}_1,\vec{v})(\vec{p}_1,\vec{p}_2)=0\\(\vec{v}_1,\vec{p}_3)&=(\vec{p}_1,\vec{v})(\vec{p}_1,\vec{p}_3)=0\end{aligned}$$

から

$$\vec{v}-(\vec{v}-\vec{v}_1)=\vec{v}_1\perp V$$

が従います．よって

$$\vec{v}_0=\vec{v}-\vec{v}_1=\vec{v}-(\vec{p}_1,\vec{v})\vec{p}_1=\left(I_3-\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1\right)\vec{v}$$

から

$$Q=I_3-\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1$$

が分かります．以上で与えた Q の異なる表現は，P が直交行列であることから相互に導くことができます．実際，P が

$$P^tP=I_3$$

を満たすことを列ベクトルで表現した

$$\begin{aligned}\vec{v}=P^tP\vec{v}&=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}{}^t\vec{p}_1\vec{v}\\{}^t\vec{p}_2\vec{v}\\{}^t\vec{p}_3\vec{v}\end{pmatrix}\\&=\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1\vec{v}+\vec{p}_2{}^t\vec{p}_2\vec{v}+\vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\vec{v}\\&=\left(\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1+\vec{p}_2{}^t\vec{p}_2+\vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\right)\vec{v}\end{aligned}$$

を導くと得られる

$$I_3=\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1+\vec{p}_2{}^t\vec{p}_2+\vec{p}_3{}^t\vec{p}_3 \tag{9.6}$$

を用います．

演習 9.7. $\vec{p}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}{}^t(2\ \ -1\ 1)$ を法線方向として持つ 2 次元部分空間

$$V:=\{\vec{v}\in\mathbf{R}^3;\ (\vec{v},\vec{p}_1)=0\}$$

への直交射影を表す行列を求めましょう．

鏡映

V に関する $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の鏡映を

$$S\vec{v} = -(\vec{p}_1, \vec{v})\vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{v})\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{v})\vec{p}_3 \tag{9.7}$$

で定義します．これは

$$\begin{aligned} S\vec{v} &= \left(-\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1 + \vec{p}_2{}^t\vec{p}_2 + \vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\right)\vec{v} \\ &= \left(I_3 - 2\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1\right)\vec{v} \end{aligned}$$

とも表せます．また $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ 座標では

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を変数変換すると

$$S\vec{p}_1 = -\vec{p}_1, \quad S\vec{p}_2 = \vec{p}_2, \quad S\vec{p}_3 = \vec{p}_3$$

を用いて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} &= {}^tPSP \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = {}^tP(S\vec{p}_1\ S\vec{p}_2\ S\vec{p}_3) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\ &= {}^tP(-\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\ &= {}^tPP \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せます．

最後に S が直交行列であることを示します．それは

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

から

$$S = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP$$

が得られますが，右辺の行列がすべて直交行列であることから分かります．さらに

$$\det(S) = \det(P) \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \det({}^tP) = -1$$

も分かります．

ここでは証明しませんが，実は 3 次の直交行列で行列式が -1 であるものは，$-I_3$ を除いて鏡映で表されます．

定理 9.3. $S \in O(3)$ が

$$\det(S) = -1, \quad S \neq -I_3$$

と仮定すると，ある単位ベクトル $\vec{p}_1 \in \mathbf{R}^3$ が存在して S が

$$V = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{p}_1) = 0\}$$

に関する鏡映として表されます．

演習 9.8. $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}{}^t(2\ \ -1\ 1)$ を法線方向として持つ 2 次元部分空間

$$V := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{p}_1) = 0\}$$

に関する鏡映を表す行列を求めましょう．

演習 9.9. 定理 *9.3* を証明しましょう．

9.2　実対称行列の対角化

定理 9.4. **（実対称行列の固有値は実数）** A を 3 次の実対称行列とします．このとき固有多項式 $\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$ の 3 根はすべて実数となります．

Proof. $\lambda = \alpha + i\beta$ が A の固有値とします．ただし，ここで $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ とします．このときある複素ベクトル $\vec{z} = \vec{a} + i\vec{b} \in \mathbf{C}^3$ $(\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3)$ が存在して

$$A\vec{z} = (\alpha + i\beta)\vec{z}, \quad \vec{z} \neq \vec{0}$$

が成立します．$\vec{z} \neq \vec{0}$ ですから

$$\vec{a} \neq \vec{0} \text{ または } \vec{b} \neq \vec{0}$$

となることに注意しましょう．$A\vec{z} = (\alpha + i\beta)\vec{z}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと

$$A\vec{a} + iA\vec{b} = (\alpha + i\beta)(\vec{a} + i\vec{b}) = (\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}) + i(\beta\vec{a} + \alpha\vec{b})$$

となりますが，最左辺と最右辺の実部と虚部を比べると

$$A\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \quad A\vec{b} = \beta\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

が従います．これを $A = {}^tA$ から得られる

$$(A\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, A\vec{b})$$

に代入すると

$$(\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \vec{b}) = (\vec{a}, \beta\vec{a} + \alpha\vec{b})$$

から

$$\beta\left(||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2\right) = 0$$

が従います．$||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 \neq 0$ ですから $\beta = 0$ すなわち $\lambda \in \mathbf{R}$ であることが分かります． □

定理 9.5.（**実対称行列は直交行列で対角化可能**）A を 3 次の実対称行列とします．

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

と 3 次の直交行列 P によって対角化されます．

Proof.（証明）以下 3 次の実対称行列 A の固有値を α_1，α_2，α_3 とします．固有値 α_1 の固有ベクトル $\vec{p}_1 \in \mathbf{R}^n$ をとります．初めから $\vec{p}_1$ が $||\vec{p}_1|| = 1$ を満たすとして

よいことが分かります．この $\vec{p}_1$ を用いて $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ を取ることができます．そして直交行列を $P_1 = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ と定めます．このとき

$$AP_1 = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\alpha_1\vec{p}_1\ \ *\ \ *) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\left(\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & * & * \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

を得ます．ここで $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ が $\mathbf{R}^3$ の基底であることから

$$A\vec{p}_i = c_{1i}\vec{p}_1 + c_{2i}\vec{p}_2 + c_{3i}\vec{p}_3 \quad (i = 2, 3)$$

と表わされることを用いました．さらに P_1 は直交行列ですから

$${}^tP_1AP_1 = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & * & * \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

が導かれます．この左辺の ${}^tP_1AP_1$ は ${}^t\left({}^tP_1AP_1\right) = {}^tP_1{}^tA{}^{tt}P_1 = {}^tP_1AP_1$ から対称行列であることが分かります．このことから

$${}^tP_1AP_1 = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right) \tag{9.8}$$

となり，A_2 が 2 次の実対称行列であることが分かります．このとき 2 次の直交行列 Q_2 が存在して

$${}^tQ_2A_2Q_2 = \begin{pmatrix} \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

と対角化できます．ここで

$$P_2 := \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q_2}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

は直交行列であることから，$P = P_1P_2$ と定めると P は直交行列となり

$$\begin{aligned} {}^tPAP &= {}^tP_2\left({}^tP_1AP_1\right)P_2 \\ &= {}^tP_2\left(\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right)P_2 = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{${}^tQ_2A_2Q_2$}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と A が直交行列 P を用いて対角化されることが分かります．　□

次に具体例について考えますが，そのときに以下の定理が有用となります．

定理 9.6. **（実対称行列の異なる固有値の固有ベクトルは直交）** A を n 次の実対称行列とします．A の相異なる固有値 α と β があるとします．このとき

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1, \quad A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2 \quad \text{ならば} \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \tag{9.9}$$

が成立します．

Proof. A は対称ですから ${}^tA = A$ から $(A\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, {}^tA\vec{v}_2) = (\vec{v}_1, A\vec{v}_2)$ が成立します．さらに

$$(A\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\alpha\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (\vec{v}_1, A\vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \beta\vec{v}_2) = \beta(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

から $(\alpha - \beta)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$ を得ます．$\alpha \neq \beta$ ですから (9.9) が従います． □

具体例について考えましょう．

例 9.1. 3 次の実対称行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

について考えます．まず

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda+1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2-1-8) = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda+3)
\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 3, 1, -3$ であることが分かります．

次にそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めますが，固有多項式の計算において用いた行基本変形はそのまま使えることに注意しましょう．

(i) $\underline{\lambda = 3\text{ のとき}}$，行基本変形

$$3I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r\times=\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{3r+=1r\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(3) \Leftrightarrow x = -2z,\ y = z$$

が従います．よって、$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

と表されます．

(ii) $\underline{\lambda = -1\text{ のとき}}$，行基本変形

$$-I_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r\times=-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3r+=(-1)\times 2r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{2r+=(-2)\times 1r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r\times=\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{1r+=1\times 2r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-1) \Leftrightarrow x = 0,\ y = -z$$

が従います．よって、$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

と表されます．

(iii) $\underline{\lambda = -3\text{ のとき}}$，行基本変形

$$-3I_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1r\times=\left(-\frac{1}{4}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3r+=1r\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-3) \Leftrightarrow x = z,\ y = z$$

が従います．よって、$\lambda = -3$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

と表されます．

さらに

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と大きさ 1 の固有ベクトルを定めると、定理 *9.6* により

$$(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が成立しますから $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は直交行列となります．さらに A は

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (3\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2\ \ -3\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$$

と直交行列 P により対角化されます．

例 9.2. 3 次の実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{9.11}$$

について考えます．この A の固有多項式は $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$ と計算されます．固有値 $\lambda = 2,\ 8$ に対する固有ベクトルを求めましょう．

(i) $\underline{\lambda = 2 \text{ のとき}}$，$2I_2 - A$ を行基本変形すると $\vec{v} = {}^t(x\ y\ z)$ に対して

$$(2I_2 - A)\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow x - y - 2z = 0$$

を得ます．このとき

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から，$V(2) := ker(2I_2 - A)$ の基底を $\vec{v}_1 = {}^t(1\ 1\ 0)$, $\vec{v}_2 = {}^t(2\ 0\ 1)$ ととれます．この基底を用いて，

$$||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0 \tag{9.12}$$

を満たす $V(2)$ の基底を次のように構成します．$\vec{v}_2$ の $\vec{v}_1$ 方向への正射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{||\vec{v}_1||^2}\vec{v}_1 = \vec{v}_1$$

で与えられます．このとき $(\vec{v}_2 - \vec{w}) \perp \vec{v}_1$ が成立することから

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{||\vec{v}_1||}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1\ 1\ 0), \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{||\vec{v}_2 - \vec{w}||}(\vec{v}_2 - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{3}}{}^t(1\ \ -1\ 1)$$

とすれば，条件 (9.12) を満たします．

(ii) $\underline{\lambda = 8 \text{ のとき}}$，$8I_2 - A$ を行基本変形すると $\vec{v} = {}^t(x\ y\ z)$ に対して

$$(8I_2 - A)\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow (x + \frac{1}{2}z = 0 \text{ かつ } y - \frac{1}{2}z = 0)$$

から $z = 2\alpha$ とおくと $V(8) := ker(8I_2 - A)$ のベクトルは

$$\vec{v} = \alpha\,{}^t(-1\ 1\ 2) \quad (\alpha \neq 0)$$

と表示されますから，大きさ 1 の $\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}{}^t(-1\ 1\ 2)$ を定めます．定理 *9.6* を用いると

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$$

が示され $P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ が直交行列であることが分かります．この P を用いると

$$AP=(2\vec{p}_1\ 2\vec{p}_2\ 8\vec{p}_3)=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&8\end{pmatrix}\quad\text{から}\quad A=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&8\end{pmatrix}{}^tP$$

と対角化できることが分かります．

演習 9.10. 次の実対称行列 A を直交行列で対角化しましょう．

(1) $A=\begin{pmatrix}5&4&-2\\4&5&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$　**(2)** $A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-1&6&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}$　**(4)** $A=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&1&4\\2&4&1\end{pmatrix}$

9.3　2 次形式

9.3.1　2 次形式

3 次の対称行列

$$A=\begin{pmatrix}a&p&r\\p&b&q\\r&q&c\end{pmatrix}$$

に対してその 2 次形式を

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

の関数として

$$(A\vec{v},\vec{v})=\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2rxz+2qyz$$

と定めます．実対称行列が直交行列で対角化できることを示した定理 9.5 は 2 次形式について以下の形で応用されます．すなわち定理 9.5 にあるように直交行列 $P\in O(3)$ を用いて A を

$${}^tPAP=\begin{pmatrix}\alpha_1&&\\&\alpha_2&\\&&\alpha_3\end{pmatrix}$$

と対角化できたとします．このとき座標変換

$$\vec{\xi} = {}^tP\vec{v} = {}^t(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$$

を用いると，A の 2 次形式は

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = ({}^tPAP{}^tP\vec{v}, {}^tP\vec{v}) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}\vec{\xi}, \vec{\xi}\right) \tag{9.13}$$

$$= \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + \alpha_3\xi_3^2 \tag{9.14}$$

と標準的な形に変換できます．

例 9.3. 例 *9.1* で考えた 3 次の対称行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9.15}$$

は

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が定める直交行列 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ を用いて

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$$

と対角化されました．このとき座標変換

$$\vec{v} = {}^tP\vec{\xi}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{v}) &= ({}^tPA\vec{v}, {}^tP\vec{v}) = ({}^tPAP{}^tP\vec{v}, {}^tP\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}\vec{\xi}, \vec{\xi}\right) \\ &= 3\xi_1^2 - \xi_2^2 - 3\xi_3^2 \end{aligned}$$

と標準的な形に表されます．

演習 9.11. 次の実対称行列が定める 2 次形式を直交行列による対角化を用いて標準形にしてください．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　　**(2)** $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2 次形式が常に一定の符号を持つかどうかが応用上重要になります．そこで次の定義をします．

定義 9.1.（**2 次形式の正定値**） A を 3 次の実対称行列とします． A が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$（あるいは A）が**正定値**（*positive definite*）であるとは

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が成立するときで，**非負定値**（*non-negative definite*）であるとは

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \geqq 0$$

が成立するときです．

この定義 9.1 において，2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$（あるいは A）が**負定値**（*negative definite*）であるとは

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が成立するときで，**非正定値**（*non-positive definite*）であるとは

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \leqq 0$$

が成立するときです．

正定値性を行列式を用いて特徴付けるために，対称行列 A の特別な小行列を定義する必要があります．A の 1 次と 2 次，3 次の（狭義の）**主座小行列** ((*successive*) *principal minors*) とは小行列

$$A_1 = (a), \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}, A_3 = A$$

のことです．

定理 9.7.（**正定値性の特徴付け**）A を 3 次の実対称行列とします．次の条件は同値です．

(1) A が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$ が正定値（*resp.* 負定値）です．

(2) $\det(A_k) > 0$ （*resp.* $(-1)^k \det(A_k) > 0$）　$(k = 1, 2, 3)$.

(3) A の固有値 α_1，α_2，α_3 がすべて正（*resp.* 負）です．

Proof. A を直交行列で対角化して (9.13) を用いれば，(1) と (3) が同値であることが容易に証明できます．

<u>(1) $\Longrightarrow$ (2)</u> (1) 従って (3) が成立すれば

$$\det(A) > 0 \quad ((-1)^k \det(A) > 0)$$

であることが，等式 ${}^tPAP = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_n)$ がある直交行列 P によって成立することから従います．さらに

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = ax^2 > 0 \quad (x \neq 0)$$

から $a > 0$ が分かります．また

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \neq \vec{0}$$

が分かります．これから定理 7.4 を用いると $\det(A_2) > 0$ も従います．以上で (1) $\Longrightarrow$ (2) を示しました．

<u>(2) $\Longrightarrow$ (1)</u> 3 次の実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$$

が条件 (2) すなわち $\det(A) > 0, \quad \det(A_2) = ab - p^2 > 0, \quad a > 0$ を満たすとします．ここで

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{v}) &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qyz + 2rxz \\ &= a\left(x + \frac{p}{a}y + \frac{r}{a}x\right)^2 + \left(b - \frac{p^2}{a}\right)y^2 + 2\left(q - \frac{pr}{a}\right)yz + \left(c - \frac{r^2}{a}\right)z^2 \end{aligned}$$

に注意します．ここでこの等式の最右辺の符号を見るために

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & p & r \\ 0 & b - \frac{p^2}{a} & q - \frac{pq}{a} \\ 0 & r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b - \frac{p^2}{a} & q - \frac{pq}{a} \\ r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix}$$

を導きます．いま $\det(A) > 0,\ a > 0$ ですから

$$\begin{vmatrix} b - \frac{p^2}{a} & q - \frac{pq}{a} \\ r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix} > 0$$

となります．これに加えて $\det(A_2) > 0$ から

$$b - \frac{p^2}{a} = \frac{ab - p^2}{a} > 0$$

も従います．以上の準備で $(y, z) \neq (0, 0)$ ならば

$$\left(b - \frac{p^2}{a}\right) y^2 + 2\left(q - \frac{pr}{a}\right) yz + \left(c - \frac{r^2}{a}\right) z^2 > 0$$

から $(A\vec{v}, \vec{v}) > 0$ であることが分かりました（ここでも 2 次の場合の定理 7.4 用いました）．他方 $y = z = 0$ ならば $\vec{v} \neq 0$ のとき $x \neq 0$ ですから

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = ax^2 > 0$$

となります． □

演習 9.12. 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ が正定値か負定値か判定しましょう．

演習 9.13. n 次の実対称行列が正定値ならば，A は正則行列で A^{-1} も実対称で正定値となります．このことを証明してください．

■非負定値性の特徴付け　本書では証明は与えませんが，実対称行列が非負定値であるための条件を小行列を用いて定式化できます．そのために 3 次の実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$$

に対して

$$A_{(1)} = (a), \quad A_{(2)} = (b), \quad A_{(3)} = (c)$$

$$A_{(1,2)} = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}, \quad A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} b & q \\ q & c \end{pmatrix}, \quad A_{(1,3)} = \begin{pmatrix} a & r \\ r & c \end{pmatrix}$$

$$A_{(1,2,3)} = A$$

を定めます．これらをそれぞれ，1 次，2 次，3 次の主座小行列と呼びます．
　このとき次の定理 9.8 が成立します．

定理 9.8.（**非負定値性の特徴付け**）3 次の実対称行列 A に対して，次の条件は同値です．
(1) A が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$ が非負定値（*resp.* 非正定値）です．
(2) 主座小行列に対して以下が成立します．

$$A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)} \geq 0 \quad \big(\textit{resp.}\ \ A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)} \leq 0\big)$$

$$\det(A_{(1,2)}), \det(A_{(2,3)}), \det(A_{(1,3)}) \geq 0$$

$$\det(A_{(1,2,3)}) \geq 0 \quad \big(\textit{resp.}\ \ \det(A_{(1,2,3)}) \leq 0\big)$$

(3) A の固有値 α_1，α_2，α_n がすべて非負（*resp.* 非正）です．

■グラム行列の正値性　実 $m \times 3$ 行列 A に対して，そのグラム行列 ${}^tAA$ は 3 次の対称行列になりますが，その 2 次形式は非負定値となります．実際

$$({}^tAA\vec{x}, \vec{x}) = (A\vec{x}, A\vec{x}) = ||A\vec{x}||^2 \geqq 0$$

から分かります．さらに ${}^tAA$ が正定値であるための必要十分条件を求めましょう．

$$||A\vec{x}|| > 0 \Leftrightarrow A\vec{x} \neq \vec{0}$$

であることを用いると，${}^tAA$ が正定値である条件は

$$\vec{x} \neq \vec{0} \Longrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$$

であることが分かります．この条件は $\mathrm{rank}(A) = 3$，すなわち A の列ベクトル表示 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ に対して $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2, \vec{a}_3$ が線型独立であることが条件となります．

演習 9.14. 実 $m \times n$ 行列 A に対して ${}^tAA\vec{x} = \vec{0} \Longleftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ であることを示してください．