差分方程式が定める数列

Nobuyuki TOSE

April 10, 2019

数列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

- 一定時間ごとの時系列データや経済量のモデルを記述するために数列を用いる.
- その関係で，経済学部では初項を a_0 とすることが多い。

漸化式のことを差分方程式 (*difference equations*) と呼ぶが，時間を含むモデルの記述に用いることが多い.

注意　(1) 時系列=Time Series
(2) 一定時間には年次，半期，四半期，月次などがある.

例 (CT 7p))

以下の差分方程式を満たす数列 $\{a_n\}$ を考えます.

$$a_0 = C \text{（初期条件）}, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

まず方程式 $\lambda = 3\lambda + 4$ を解くと $\lambda = -2$ を得ます.

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & 3a_n + 4 & \cdots (1) \\ -2 & = & 3 \cdot (-2) + 4 & \cdots (2) \end{cases}$$

において $(1) - (2)$ を考えると

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$$

であることが分かります. これは $\{a_n + 2\}$ が公比 3 の等比数列であることを意味します. 従って

$$a_n + 2 = 3^n(a_0 + 2) \quad \textit{i.e.} \quad a_n = 3^n(C + 2) - 2$$

1 次方程式

$$\lambda = 3\lambda + 4$$

ですが，初期条件を無視して

$$a_n = \lambda \text{（一定）} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たす解を考えていることになります.

差分方程式 (3)

例 (CT 13p)

差分方程式

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n & = & 0 & (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ a_0 = C_0,\ a_1 = C_1 & & \text{(初期条件)} & \end{cases}$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ を考えます．

$$\begin{aligned} n = 0 \quad & a_2 - 3a_1 + 2a_0 = 0 \\ n = 1 \quad & a_3 - 3a_2 + 2a_1 = 0 \\ n = 2 \quad & a_4 - 3a_3 + 2a_2 = 0 \\ & \vdots \end{aligned}$$

から，a_0, a_1 を与えると，$a_2.a_3, a_4, \dots$ と定まっていきます．

差分方程式 (4)–特性方程式とは

方程式に対して特性方程式

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

を考えます．これを解くと

$$\lambda = 1, 2$$

となります（特性根）.
初期条件を無視して $a_n = C\lambda^n$ の形 (等比数列) で解を求めます.

$$a_0 = C, \quad a_1 = C\lambda, \quad a_2 = C\lambda^2, \quad a_3 = C\lambda^3, \ldots$$

差分方程式に $a_n = C\lambda^n$ を代入すると

$$C\lambda^{n+2} - 3C\lambda^{n+1} + 2C\lambda^n = C\lambda^n(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

となりますから，$\lambda = 1$ または $\lambda = 2$ のとき，すなわち

$$a_n = C \text{ または } a_n = C \cdot 2^n$$

と 2 系統の解を見つけることができます（差分方程式の基本解）.

特性方程式の解が $\lambda = 1, 2$ であることから

$$1 + 2 = 3, \quad 1 \cdot 2 = 2$$

従って方程式を

$$a_{n+2} - (1+2)a_{n+1} + 1 \cdot 2 a_n = 0$$

と変形します．さらに 2 通りに

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) & \ldots (1) \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n & \ldots (2) \end{cases}$$

差分方程式 (6)–実際解いてみよう

(1) から

$$a_1 - a_0 \xrightarrow{\times 2} 2(a_1 - a_0) \xrightarrow{\times 2} \ldots \xrightarrow{\times 2} 2^n(a_1 - a_0)$$

と考えると

$$a_{n+1} - a_n = 2^n(a_1 - a_0) \tag{3}$$

(2) から

$$a_1 - 2a_0 \xrightarrow{=} a_1 - 2a_0 \xrightarrow{=} \ldots \xrightarrow{=} a_1 - 2a_0$$

と考えると

$$a_{n+1} - 2a_n = a_1 - 2a_0 \tag{4}$$

(3)–(4) から

$$a_n = 2^n(a_1 - a_0) - (a_1 - 2a_0) = 2^n(C_1 - C_0) - (C_1 - 2C_0)$$

注意

差分方程式

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

の解は 2 系統の解の定数倍の和として

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 1$$

として書ける.

2 階線型差分方程式

$p, q \in \mathbf{R}$ として，差分方程式

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

に対して特性方程式

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

を考えます．
$D = p^2 - 4q > 0$ のとき　上の例と同様に，特性方程式の 2 根を α, β とすると $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq \beta$ となり，差分方程式の解は

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(A, B は n に依らない定数)．
$D = p^2 - 4q < 0$ のとき 三角関数 $\sin$, $\cos$ で解が記述できます．マクロ経済動学では重要になります．

$D=0$ のとき

差分方程式

$$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0\quad(n=0,1,2,3,\ldots)$$

の特性方程式は

$$\lambda^2-4\lambda+4=0\quad\text{すなわち}\quad(\lambda-2)^2=0$$

です．差分方程式は $2+2=4$, $2\cdot2=4$ から

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2\,(a_{n+1}-2a_n)$$

と変形できます．$\{a_{n+1}-2a_n\}$ は公比 2 の等比数列ですから

$$a_{n+1}-2a_n=2^n(a_1-2a_0)\quad(n=0,1,2,\ldots)$$

となります．この両辺を 2^{n+1} で割ると

$D = 0$ のとき (2)

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1 - 2a_0}{2}$$

従って $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ は公差 $\frac{a_1-2a_0}{2}$ の等差数列であることが分かります.

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_0}{2^0} + n\frac{a_1 - 2a_0}{2}$$

最後にこの両辺を 2^n 倍して

$$a_n = a_0 \cdot 2^n + (a_1 - 2a_0) \cdot n2^{n-1}$$

$D = 0$ のとき

$D = p^2 - 4q = 0$ のとき 特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の重根が α であるとき差分方程式の解は

$$a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot n\alpha^{n-1}$$

となります（A, B は n に依らない定数）.