クモの巣過程・階差数列・数列の収束

Nobuyuki TOSE

CalcNT, April 15, 2018

ある生産物に対して

p: 価格，D: 需要量，S: 供給量

$$
\begin{aligned}
\text{需要曲線}D:&\ p = aD + b \\
\text{供給曲線}S:&\ p = a'S + b'
\end{aligned}
$$

前提 $a \neq a'$ この条件は D と S が 1 点で交わることと必要十分である.

第 t 期の供給量 x_t, 価格 p_t

$$
\begin{aligned}
\text{第 } t \text{ 期の供給量} x_t &\xrightarrow{D} p_t = a x_t + b \\
&\xrightarrow{S} x_{t+1} = \frac{1}{a'}(p_t - b')
\end{aligned}
$$

p_t を消去して

$$x_{t+1} = \frac{a}{a'} x_t + \frac{b - b'}{a'} \tag{1}$$

となる.

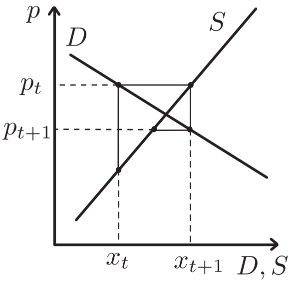
$$\lambda = \frac{a}{a'} \lambda + \frac{b - b'}{a'}$$

を解くと

$$\lambda = \lambda_0 := \frac{b - b'}{a' - a} \tag{2}$$

これを用いると (1) は

$$\boldsymbol{x_t = \left(\frac{a}{a'}\right)^t (x_0 - \lambda_0) + \lambda_0}$$



供給量と価格の時系列 (2)

$\left|\frac{a}{a'}\right| < 1$ ならば

$$x_t \to \lambda_0 \quad (t \to +\infty)$$

が分かる．このとき

$$p_t = ax_t + b \to a\lambda_0 + b \quad (t \to +\infty)$$

注意 $|r| < 1$ ならば $r^n \to 0$ $(n \to +\infty)$
注意　$(x, p) = (\lambda_0, a\lambda_0 + b)$ は 2 直線

$$\begin{cases} p &= & ax + b \\ p &= & a'x + b' \end{cases}$$

の交点である．

階差数列

数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ に対して

$$\beta_n := x_{n+1} - x_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

を階差数列と呼びます.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & \cdots & & & x_n \\ & \vee & & \vee & & \vee & & & & \vee & \\ & \beta_0 & & \beta_1 & & \beta_2 & & & & \beta_{n-1} & \end{array}$$

このとき

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + (x_1 - x_0) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_0 + \beta_0 + \cdots + \beta_{n-1} \end{aligned}$$

階差数列 (2)

$\{\beta\}_n$ が既知 (known, given) であるとして，差分方程式

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta_n$$

を考える．両辺を α^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{\beta_n}{\alpha^{n+1}}$$

が従う．

P_n	第 n 年度のプライマリー・バランス （＝財政赤字 − 国債の利払い）
D_n	第 n 年度の国債の残高
r	利子率

とする．このとき

$$D_{n+1} = (1+r)D_n - P_{n+1}$$

両辺を $(1+r)^{n+1}$ で割ると

$$\frac{D_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} - \frac{D_n}{(1+r)^n} = -\frac{P_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}$$

プライマリー・バランス (2)

$$\frac{D_n}{(1+r)^n} = \frac{D_0}{(1+r)^0} + \left(\frac{D_1}{1+r} - \frac{D_0}{(1+r)^0}\right) + \left(\frac{D_2}{(1+r)^2} - \frac{D_1}{1+r}\right)$$
$$+ \cdots + \left(\frac{D_n}{(1+r)^n} - \frac{D_{n-1}}{(1+r)^{n-1}}\right)$$
$$= D_0 - \frac{P_1}{1+r} - \frac{P_2}{(1+r)^2} - \cdots - \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

から

$$D_n = D_0(1+r)^n - P_1(1+r)^{n-1} - P_2(1+r)^2 - \cdots - P_n$$

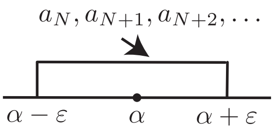
注意 「現在割引価値」が分かるとこれは当たり前に思えるはず.

無限数列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

があるとします．このとき $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty) \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \text{に対して} \exists N \text{番号が存在して}$$
$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N)$$



数列の収束 (2)–例

例 1 定数列 $a_n = c(n = 0, 1, 2, 3, \ldots))$ とすると

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

実際，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$c - \varepsilon < a_n = c < c + \varepsilon$$

例 2 $a_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots))$ とすると

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = N - 1$ とすると

$$\frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = N$$

従って $n \geq N$ とすると

$$-\varepsilon + 0 < 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon + 0$$

注意 ここで Gauss 記号の性質

$$x - 1 < [x] \leq x \quad (x \in \mathrm{R})$$

を用いました.