微分可能な関数

Nobuyuki TOSE

CalcNT, May 22, 2019

微分可能な関数—定義

定義

$f: (A, B) \to \mathbf{R}$ に対して，$f(t)$ が $t = c \in (A, B)$ で微分可能とは極限

$$\lim_{t \to c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c}$$

が存在するときです．この極限を $f'(c)$ と記して，f の $t = c$ における**微分係数**と呼びます．
さらに $f(t)$ が各点 $t = c \in (A, B)$ で微分可能であるとき f は (A, B) 上微分可能であると呼びます．

定理 CT84p

定理

$f(t)$ が $t = c \in (A, B)$ で微分可能とします．このとき $f(t)$ は $t = c$ で連続です．すなわち

$$f(t) \to f(c) \quad (t \to c)$$

Proof

$$f(t) - f(c) = \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \cdot (t - c)$$

から

$$f(t) = \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \cdot (t - c) + f(c) \to f'(c) \cdot 0 + f(c) = f(c) \quad (t \to c)$$

これは $f(t)$ が $t = c$ で連続であることを意味します．

微分の公式

公式

以下では f と g は $t=c$ で微分可能とします．このとき $t=c$ で以下が成立します．

(i) $(f \pm g)' = f' \pm g'$
(ii) $(fg)' = f'g + fg'$ （Leibniz' Rule）
(iii) $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$

(ii) を示します．((iii) は自分で示せるか？)

$$
\begin{aligned}
\frac{f(t)g(t) - f(c)g(c)}{t-c} &= \frac{f(t)g(t) - f(c)g(t) + f(c)g(t) - f(c)g(c)}{t-c} \\
&= \frac{f(t)g(t) - f(c)g(t)}{t-c} + \frac{f(c)g(t) - f(c)g(c)}{t-c} \\
&= g(t)\frac{f(t) - f(c)}{t-c} + f(c)\frac{g(t) - g(c)}{t-c} \\
&\to g(c) \cdot f'(c) + f(c)g'(c)
\end{aligned}
$$

Examples(1)

Example 1 $(x^n)' = nx^{n-1}$
n に関する帰納法で示します． $n = 1$ のとき $(x)' = 1$ から OK. ここで $(x^n)' = nx^{n-1}$ を仮定すると

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x^n \cdot x)' \\ &= (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\ &= nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n = (n+1)x^{n+1-1}\end{aligned}$$

Example 2 $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Examples(2)

Example 3

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(x\sqrt{x})' = (x)'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$$

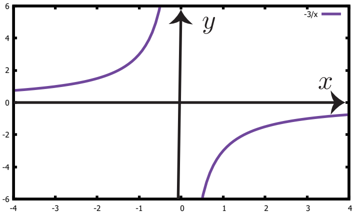
$$(x^2\sqrt{x})' = (x^2)'\sqrt{x} + x^2(\sqrt{x})' = 2x \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \cdot x\sqrt{x}$$

Example 4

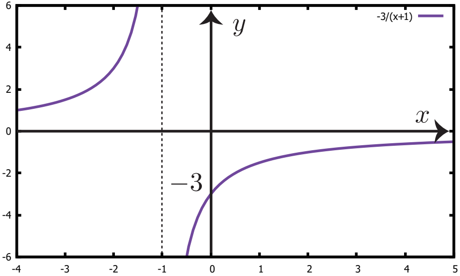
$$\begin{aligned}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)' &= \frac{(2x-1)'(x+1) - (2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1) - (2x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

分数関数のグラフ（ついで））(1)

$$y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$$

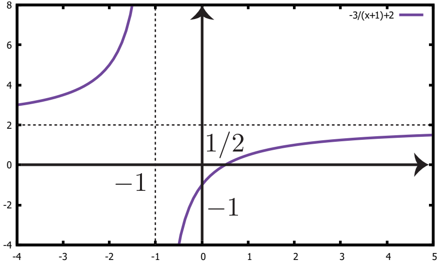


$y = -3/x$



$y = -\frac{3}{x+1}$

分数関数のグラフ（ついで））(2)



$x \to +\infty$ のとき $\frac{1}{x} \to$ なので

$$y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \to \frac{2-0}{1+0} = 2 \quad (x \to +\infty)$$

合成関数の微分

$f(x)=(x+a)^{10}$ を微分することを考えます．これは以下の 2 つの関数の合成です．

$$g(u)=u^{10}, \quad u=u(x)=x+a \quad \text{のとき} \quad f(x)=g(u(x))$$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\frac{(x+a)^{10}-(c+a)^{10}}{x-c}$$

$x\to c$ のとき $u=u(x)\to c+a$ となります．ここで $A=c+a$ と定義すると

$$\frac{(x+a)^{10}-(c+a)^{10}}{x-c}=\frac{u^{10}-A^{10}}{u-A}\cdot\frac{(x+a)-(c+a)}{x-c}$$
$$\to 10A^9\cdot 1=10(c+a)^9$$

従って $f'(x)=\left((x+a)^{10}\right)'=10(x+a)^9$

合成関数の微分 (2)

$f(x) = \sqrt{x-1}$ を微分します．この関数は以下の 2 つの関数の合成です．

$$g(u) = \sqrt{u},\ u = u(x) = x - 1 \quad \text{のとき} \quad f(x) = g(u(x))$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{c-1}}{x - c}$$

$x \to c$ のとき, $u = u(x) \to c - 1$. ここで $A = c - 1$ と定義すると

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{c-1}}{x - c} &= \frac{\sqrt{u} - \sqrt{A}}{u - A} \cdot \frac{(x-1) - (c-1)}{x - c} \\ &\to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{c-1}}\end{aligned}$$

従って $f'(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

合成関数の微分 (3)

$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ を微分します．この関数は以下の 2 つの関数の合成です．

$$g(u)=\sqrt{u},\ u=u(x)=x^2+1 \quad \text{のとき} \quad f(x)=g(u(x))$$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{c^2+1}}{x-c}$$

$x\to c$ のとき, $u=u(x)\to c^2+1$ となします．ここで $A=c^2+1$ と定義すると

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{c^2+1}}{x-c}&=\frac{\sqrt{u}-\sqrt{A}}{u-A}\cdot\frac{(x^2+1)-(c^2+1)}{x-c}\\&\to\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{A}}\cdot 2c=\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\end{aligned}$$

従って $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

合成関数の微分（Chain Rule）

Chain Rule

$(g(u(x)))' = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

$x \to c$ のとき, $u = u(x) \to u(c)$ となります．ここで $A = u(c)$ と定義すると

$$\begin{aligned}\frac{g(u(x)) - g(u(c))}{x - c} &= \frac{g(u) - g(A)}{u - A} \cdot \frac{u(x) - u(c)}{x - c} \\ &\to g'(A) \cdot u'(c) = g'(u(c)) \cdot u'(c)\end{aligned}$$

2 つの関数 $y = g(u)$, $u = u(x)$ を合成した関数 $y = g(u(x))$ の微分を

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

とも表現します．

Examples

Example 5 $y = (1+x^2)^3$ は

$$y = u^3 \quad と \quad u = 1 + x^2$$

の合成ですから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 2x = 6(1+x^2)^2 x$$

Example 6 $y = \frac{1}{(1+x^2)^3}$ は

$$y = \frac{1}{u^3} \quad と \quad u = 1 + x^2$$

の合成ですから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{3}{u^4} \cdot 2x = -\frac{6x}{(1+x^2)^4}$$