連続関数

Nobuyuki TOSE

June 06, 2018

連続関数 — 定義

定義

関数 $g: (A,B) \to \mathbf{R}$ があるとき，$g(t)$ が $t = c \in (A,B)$ で連続であるとは

$$g(t) \to g(c) \quad (t \to c)$$

さらに g が (A,B) で連続であるとは $g(t)$ が任意の $t = a \in (A,B)$ で連続であるときです.

Example 1

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

について考えると

$$g(\frac{1}{n}) = 1 \to 1 \quad (n \to +\infty)$$
$$g(-\frac{1}{n}) = 0 \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

これは極限 $\lim_{t \to 0} g(t)$ が存在しないことを意味して，従って $g(t)$ は $t = 0$ で連続ではありません．

Example

Example 2 多項式関数

$$g(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

を考えます．$t^k \to t_0^k \ (t \to t_0)$ なので

$$g(t) \to a_m t_0^m + a_{m-1} t_0^{m-1} + \cdots + a_1 t_0 + a_0 = g(t_0)$$

が任意の $t = t_0 \in \mathbf{R}$ で成立します．従って g は $\mathbf{R}$ で連続です．

右極限（Limit on the Right）

関数 $g:(A,B)\to\mathbf{R}$ に対して，t が A に近付くときの $g(t)$ の極限をどのように定義するか？

右極限

$$g(t)\to\alpha \quad (t\to A+0)$$

とは数列 $\{t_n\}$ が条件

$$t_n\in(A,B),\ t_n\to A\ (n\to+\infty)$$

を満たすならば

$$g(t_n)\to\alpha \quad (n\to+\infty)$$

Example 1 もう一度，関数

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

このとき

$$g(t) \to 1 \quad (t \to +0)$$
$$g(t) \to 0 \quad (t \to -0)$$

いま $g(0) = 1$ であるので, g は $t = 0$ で右連続であるといいます.

Another example

Example 3 関数

$$g(t) : (0, +\infty) \to \mathbf{R} \quad t \mapsto g(t) = \frac{1}{t}$$

を考えます． $g(t) \to +\infty \quad (t \to +0)$.

Example 4 関数

$$g(t) : (-\infty, 0) \to \mathbf{R} \quad t \mapsto g(t) = \frac{1}{t}$$

を考えます． $g(t) \to -\infty \quad (t \to -0)$.

Remark

Remark (i)

$$
\begin{aligned}
& g(t) \to \alpha \in \mathbf{R} \quad (t \to A+0) \\
\Leftrightarrow & \\
& \text{任意の}\varepsilon > 0 \text{ に対して } \delta > 0 \text{ が存在して} \\
& A < t < A + \delta \Rightarrow -\varepsilon + \alpha < g(t) < \varepsilon + \alpha
\end{aligned}
$$

Remark (ii) Given a function $f : (A, B) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$ に対して

$$f(t) \to \alpha \quad (t \to c \in (A, B))$$

ならば

$$f(t) \to \alpha \quad (t \to c \pm 0 \in (A, B))$$

閉区間上の連続関数

定義

関数 $g : [A, B] \to \mathbf{R}$ に対して g が $[A, B]$ 上で連続であるとは

$$\begin{gathered}\textbf{(i)} g(t) \to g(A) \quad (t \to A+0)\\ \textbf{(ii)} g(t) \to g(B) \quad (t \to B-0)\\ \textbf{(iii)} g(t) \text{が任意の} t = t_0 \in (A, B) \text{で連続}\end{gathered}$$

連続関数の最大値の定理

定理

関数 $g: [A, B] \to \mathbf{R}$ $[A, B]$ 上で連続であるとします．このとき g には最大値 M と最小値 m が存在します．

$$m \leq g(t) \leq M \quad (A \leq t \leq B)$$

$$g(a) = m \quad \text{for some } a \in [A, B]$$

$$g(b) = M \quad \text{for some } b \in [A, B]$$

Examples

Example 5 関数

$$g_5 : (1,2) \to \mathbf{R} \quad t \mapsto g_5(t) = \frac{1}{t}$$

は最大値も最小値ももたない.

Example 6 関数

$$g_6 : [1,+\infty) \to \mathbf{R} \quad t \mapsto g_6(t) = \frac{1}{t}$$

最大値 1 を $t = 1$ でとるが最小値をもたない.

中間値の定理（Intermediate Value Theorem）

中間値の定理（Intermediate Value Theorem）

関数 $g:\ [A,B]\to\mathbf{R}$ が以下の条件を満たすとします.
(i) g は $[A,B]$ 上連続である.
(ii) $g(A)<g(B)$.
このとき任意の $c\in(g(A),g(B))$ に対して $t_0\in(A,B)$ が存在して

$$g(t_0)=c$$

逆関数定理

定理

Given a function $g: [A, B] \to \mathbf{R}$ and assume the following conditions:
(i) g は $[A, B]$ 上で連続である.
(ii) g is 狭義の増加関数 *i.e.*

$$A \leq s < t \leq B \Rightarrow g(s) < g(t)$$

このとき g の逆関数

$$g^{-1}: [g(A), g(B)] \to \mathbf{R}$$

が存在して $[g(A), g(B)]$ 上で連続となります.

指数関数の連続性 (1)

補題 1

$a > 1$ のとき

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a}{n}$$

$$-\frac{a}{n} < a^{-\frac{1}{n}} - 1 < 0$$

$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n$ とすると $\alpha_n > 0$ となり

$$a = (1 + \alpha_n)^n > n\alpha_n$$

であることが 2 項定理から従います.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \alpha_n < \frac{a}{n}$$

指数関数の連続性 (2)

他方 $a^{-\frac{1}{n}} = 1 - \beta_n$ とすると $0 < \beta_n < 1$ であり

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1-\beta_n} = 1 + \beta_n + \beta_n^2 + \cdots > 1 + \beta_n$$

従って

$$a > (1+\beta_n)^n > n\beta_n$$

が 2 項定理から分かります．これから $0 < \beta_n < \frac{a}{n}$ と

$$1 - \frac{a}{n} < 1 - \beta_n = a^{-\frac{1}{n}}$$

が従います．

指数関数の連続性 (3)

補題 2

$a > 1$ であるとき

$$-\frac{1}{n} < h < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{a}{n} < a^{-\frac{1}{n}} < a^h < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{a}{n}$$

補題 2 は補題 1 から導けます.
任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して自然数 $N \in \mathbf{N}$ が存在して $\frac{a}{N} < \varepsilon$ となります.
このとき $\delta = \frac{1}{n}$ とすると

$$-\delta < t < \delta \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < -\frac{a}{n} < a^t - 1 < \frac{a}{n} < \varepsilon$$

これは $g(t) = a^t$ が $t = 0$ で連続であることを意味します.