ネピアの数 e

Nobuyuki TOSE

June 05, 2019

Nepier's Number

以下の数列について考えよう．

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2.000 \\
e_2 &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.250 \\
e_3 &= \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2.370 \\
e_4 &= \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2.441 \\
&\vdots \\
e_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

上に有界な単調増加数列の収束

定理

無限数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は単調増加であるとします：

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$$

さらに $\{a_n\}$ は上に有界であるとします：正数 $M > 0$ が存在して

$$a_n \leq M \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

このとき $\{a_n\}$ は収束します.

The proof of the theorem is highly transcendental. We are going to work on the assumption of it.

e_n の収束 (1)

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
=\ & 1 + {}_nC_1\frac{1}{n} + {}_nC_2\frac{1}{n^2} + {}_nC_3\frac{1}{n^3} + \cdots + {}_nC_k\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
=\ & 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots \\
& \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdots 1}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
=\ & 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\
& \cdots + \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots \\
& \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

e_n の収束 (2)

は単調増加 $\{e_n\}$ *i.e.*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

実際

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
< \ & \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{n+1}\right)\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

e_n の収束 (3)

次に $\{e_n\}$ が上に有界であることを示します.

$$e_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

さらに

$$2^{n-1} < n! \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$$

から従いますから,

$$\begin{aligned} e_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3 \end{aligned}$$

Convergence of e_n (4)–Another Approach

The A-G Inequality

For $(n+1)$ positive numbers $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} > 0$, we have

$$(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}$$

We apply the inequality to the $(n+1)$ numbers

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right), \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right), 1}_{n \text{ copies}}$$

to get

$$\begin{aligned} \left\{\left(1+\tfrac{1}{n}\right) \ldots \left(1+\tfrac{1}{n}\right) \cdot 1\right\}^{\frac{1}{n+1}} &\leq \tfrac{1}{n+1}\left\{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\tfrac{1}{n}\right)+1\right\} \\ &= \frac{1}{n+1}(n+2) = 1 + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Convergence of e_n (5)–Another Approach

Taking the $(n+1)$th power of the both side, we get

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \textit{i.e.} \quad e_n \leq e_{n+1}$$

Accordingly $\{e_n\}$ is increasing.
We define another sequence $\{f_n\}$ by

$$f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

It is clear that

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = f_n$$

Convergence of e_n (6)–Another Approach

We make use of the AG inequality for

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right), \dots, \left(1-\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ copies}}, 1$$

to get

$$\left\{\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\dots\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdot 1\right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad \leq \quad \tfrac{1}{n+1}\left\{\left(1-\tfrac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1-\tfrac{1}{n}\right)+1\right\} = \frac{n}{n+1}$$

Taking the $(n+1)$th power of the both side, it follows that

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

Convergence of e_n (7)–Another Approach

Moreover we take the inverse of the both side to get

$$\begin{aligned} f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\ &\leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1} = f_{n-1} \end{aligned}$$

Accordingly

$$e_n \leq f_n \leq f_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4$$

Thus $\{e_n\}$ is bounded from above!

ネピアの数–ファイナンス (1)

1 単位の資金を年利率 $r > 0$ で銀行に預金します.
利子を 4 半期ごとに計算すると 1 年後に元利合計は

$$\left(1 + \frac{r}{4}\right)^4$$

利子を毎月計算すると 1 年後に元利合計は

$$\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}$$

利子を毎日計算すると 1 年後に元利合計は

$$\left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365}$$

ネピアの数–ファイナンス (2)

Compounding of the interest in general

利子計算を同じ長さの m 期間で行うと元利合計は

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$$

となります．さらに連続的に実行すると元利合計は

$$\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = e^r$$

極限 (1)

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \tag{1}$$

$n \leqq t \leqq n+1$ とすると

$$1+\frac{1}{n+1} \leqq 1+\frac{1}{t} \leqq 1+\frac{1}{n}$$

従って

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{t}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^t \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n},$$

これから

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n}$$

極限 (2)

さらに

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\longrightarrow e\cdot 1=e$$

と

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot(1+\frac{1}{n})\longrightarrow e\cdot 1=e$$

$t\to+\infty$ とすると $n\to+\infty$ となり

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\to e\quad(t\to+\infty)$$

極限 (3)

極限

$$\lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \tag{2}$$

s を $t = -s$ と定義すると，$t \longrightarrow -\infty$ のとき $s \longrightarrow +\infty$ となり，

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t &= \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{-s} = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{-s} = \left(\frac{s}{s-1}\right)^{s} \\ &= \left(1 + \frac{1}{s-1}\right)^{s-1} \left(1 + \frac{1}{s-1}\right) \to e \cdot 1\end{aligned} \tag{3}$$

極限 (4)

極限

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

ここで h を $h = \frac{1}{t}$ と定義する.
$\underline{h \to +0 \text{ のとき}}$, $t \to +\infty$ となり

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = (1+\frac{1}{t})^t \to e$$

$\underline{h \to -0 \text{ のとき}}$, $t \to -\infty$ となり

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = (1+\frac{1}{t})^t \to e$$

右極限・左極限

$a < c < b$ とします． 関数 $f: (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$

定理

次の条件は必要十分です．

(i) $\displaystyle\lim_{t \to c} f(t)$ が存在する．

(ii) $\displaystyle\lim_{t \to c+0} f(t)$ と $\displaystyle\lim_{t \to c-0} f(t)$ が存在して

$$\lim_{t \to c+0} f(t) = \lim_{t \to c-0} f(t)$$

この定理は例えば以下を使うと示せる．

$$\lim_{t \to c+0} f(t) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$c < t < c + \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha - \varepsilon < f(t) < \alpha + \varepsilon$$

極限 (5)

関数 $\log t$ の連続性から

極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1 \tag{4}$$

極限 (6)

次に $x = \log(1+h)$ とすると

$$h = e^x - 1$$

となるが，関数 e^x の連続から

$$x \to 0 \quad \text{のとき} \quad h \to 0$$

および

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{\log(1+h)}{h} \longrightarrow 1 \quad (x \longrightarrow 0)$$

を得る．

極限

$$\frac{e^x - 1}{x} \longrightarrow 1 \quad (x \longrightarrow 0) \tag{5}$$