# 2008 年度後期「微分積分」
（2019 年 12 月修正版）

次の積分の値を求めよ。

**(1)** $\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$　**(2)** $\int_1^2 \frac{1}{y^3}dy$　**(3)** $\int_0^1 x\sqrt{x}dx$　**(4)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos tdt$　**(5)** $\int_1^e t\log tdt$

**(6)** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$　**(7)** $\int_1^e (\log x)^2\,dx$　**(8)** $\int_0^1 te^{-t^2}dt$　**(9)** $\int_0^{\frac{1}{2}} t\sqrt{1-t^2}dt$　**(10)** $\int_0^1 x(x-1)^3dx$

**(11)** $\int_0^6 \left(\frac{1}{3}x-1\right)^4 dx$　**(12)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$　**(13)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos xdx$　**(14)** $\int_1^2 \log(x+1)dx$

**(15)** $\int_1^e (2x-1)\log xdx$　**(16)** $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{(2x+1)^3}dx$　**(17)** $\int_0^1 \frac{x-1}{(x-2)^2}dx$　**(18)** $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$

**(19)** $\int_1^2 x\log(x+1)dx$　**(20)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2xdx$

**(1)** $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ から $\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ を得ますから

$$\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx = \left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_1^8 = \frac{3}{4}(16-1) = \frac{45}{4}$$

**(2)** $\left(\frac{1}{y^2}\right)' = -2\frac{1}{y^3}$ から $\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}\right)' = \frac{1}{y^3}$ を得ますから

$$\int_1^2 \frac{1}{y^3}dy = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3}{8}$$

**(3)** $\left(x^2\sqrt{x}\right)' = \frac{2}{5}x\sqrt{x}$ から $\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)' = x\sqrt{x}$ を得ますから

$$\int_0^1 x\sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

**(4)**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos tdt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\sin t)'dt \\
&= [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin tdt \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\cdot 1 - 0\cdot 0\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)'dt \\
&= \frac{\pi}{2} + [\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} + (0-1) = \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

**(5)**

$$\begin{aligned}
\int_1^e t\log tdt &= \int_1^e \left(\frac{t^2}{2}\right)'\log tdt \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\log t\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}dt \\
&= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{t}{2}dt \\
&= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e \\
&= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

**(6)** $\left(\sqrt{x+2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ から $\left(2\sqrt{x+2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ を得ますから

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \left[2\sqrt{x+2}\right]_{-1}^1 = 2\left(\sqrt{3}-1\right)$$

**(7)**

$$\begin{aligned}
\int_1^e (\log x)^2\,dx &= \int_1^e (x)'(\log x)^2\,dx \\
&= \left[x(\log x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\cdot 2\log x\frac{1}{x}dx \\
&= e - 2\int_1^e \log xdx \\
&= e - 2[x\log x - x]_1^e \\
&= e - 2\{(e\cdot 1 - e) - (1\cdot 0 - 1)\} \\
&= e - 2
\end{aligned}$$

**(8)** $\left(-t^2\right)' = -2t$ から $t = -\frac{1}{2}\left(-t^2\right)'$ を得ますから

$$I := \int_0^1 te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-t^2)'e^{-t^2}dt$$

となります。ここで $u = -t^2$ とおくと $du = (-t^2)'dt$ で積分範囲の対応は

| $t$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $u$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

となります。このことから

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^u du = -\frac{1}{2}[e^u]_0^{-1} = -\frac{1}{2}\left(e^{-1}-1\right) = \frac{e-1}{2e}$$

**(9)** $\left(1-t^2\right)' = -2t$ から $t = -\frac{1}{2}\left(1-t^2\right)'$ となりますから

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} t\sqrt{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t^2)'\sqrt{1-t^2}dt$$

を得ます。ここで $u=1-t^2$ とおくと $du=(1-t^2)'dt$ で積分範囲の対応は

| | | | |
|---|---|---|---|
| $t$ | 0 | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ |
| $u$ | 1 | $\searrow$ | $\frac{3}{4}$ |

となります。このことから

$$I = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{4}}\sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{3}{4}} = \frac{8-3\sqrt{3}}{24}$$

**(10)**

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x-1)^3dx &= \int_0^1 x\left(\frac{(x-1)^4}{4}\right)'dx\\ &= \left[x\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{(x-1)^4}{4}dx\\ &= 0-\int_0^1\left(\frac{(x-1)^5}{4\cdot 5}\right)'dx\\ &= -\left[\frac{(x-1)^5}{20}\right]_0^1 = -\frac{1}{20}\end{aligned}$$

**(11)** $u=\frac{1}{3}x-1$ とすると $du=\frac{1}{3}dx$ となります。積分範囲の対応は

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $\nearrow$ | 6 |
| $u$ | $-1$ | $\nearrow$ | 1 |

となりますから、

$$\begin{aligned}\int_0^6\left(\frac{1}{3}x-1\right)^4dx &= \int_{-1}^1 u^4\cdot 3du\\ &= 3\left[\frac{u^5}{5}\right]_{-1}^1 = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

**(12)** $u=1+\cos x$ とおくと $du=-\sin xdx$ となります。また積分範囲の対応は

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| $u$ | 2 | $\searrow$ | $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

となりますから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx &= -\int_2^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{du}{u}\\ &= -\left[\log u\right]_2^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\\ &= \log\frac{4}{2+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

**(13)** $u=\sin x$ とおくと $du=\cos xdx$ となります。また積分範囲の対応は

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $u$ | 0 | $\nearrow$ | 1 |

となりますから、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos xdx = \int_0^1 u^3du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

**(14)** $u=x+1$ とすると $du=dx$ となります。また積分範囲の対応は

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | $\nearrow$ | 2 |
| $u$ | 2 | $\nearrow$ | 3 |

となりますから、

$$\begin{aligned}\int_1^2\log(x+1)dx = \int_2^3\log udu &= \int_2^3(u)'\log udu\\ &= [u\log u]_2^3 - \int_2^3 u\cdot\frac{1}{u}\\ &= 3\log 3-2\log 2-\int_2^3 du\\ &= 3\log 3-2\log 2-1\end{aligned}$$

**(15)**

$$\begin{aligned}&\int_1^e(2x-1)\log xdx\\ &= 2\int_1^e x\log xdx - \int_1^e\log xdx\\ &= \int_1^e\left(x^2\right)'\log xdx - \int_1^e(x)'\log xdx\\ &= \left[x^2\log x\right]_1^e - \int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx\\ &\quad -[x\log x]_1^e + \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= e^2 - \int_1^e xdx - e + \int_1^e dx\\ &= e^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e - e + [x]_1^e\\ &= e^2-\frac{1}{2}(e^2-1)-e+(e-1)\\ &= \frac{e^2-1}{2}\end{aligned}$$

**(16)** $u=2x+1$ とすると $du=2dx$ から $dx=\frac{1}{2}du$ を得ます。また積分範囲の対応は

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $\nearrow$ | $-1$ |
| $u$ | $-5$ | $\nearrow$ | $-1$ |

となりますから、

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-1}\frac{1}{(2x+1)^3}dx &= \int_{-5}^{-1}\frac{1}{u^3}\cdot\frac{1}{2}du\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2}\right]_{-5}^{-1}\\ &= -\frac{6}{25}\end{aligned}$$

**(17)** $u = x - 2$ とおくと $du = dx$ で積分範囲の対応は

| $x$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $u$ | $-2$ | $\nearrow$ | $-1$ |

となりますから、

$$\int_0^1 \frac{x-1}{(x-2)^2}dx = \int_{-2}^{-1} \frac{u+1}{u^2}du = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) du$$
$$= [\log|u|]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-1}$$
$$= \log 1 - \log 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \log 2$$

**(18)** $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$ から

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx &= \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\log(x-1) - \log(x+1)\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}\end{aligned}$$

**(19)**

$$\int_1^2 x\log(x+1)dx$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)\log(x+1)dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\log(x+1)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}dx$$
$$= 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$
$$= 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\log(x+1)\right]_1^2$$
$$= 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\log 3 - \log 2)$$
$$= \frac{3}{2}\log 3 - \frac{1}{4}$$

**(20)** $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$ から

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx = \frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$