四 関数の応用 (費用の最小化)

$$u : \mathbb{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{効用関数}$$

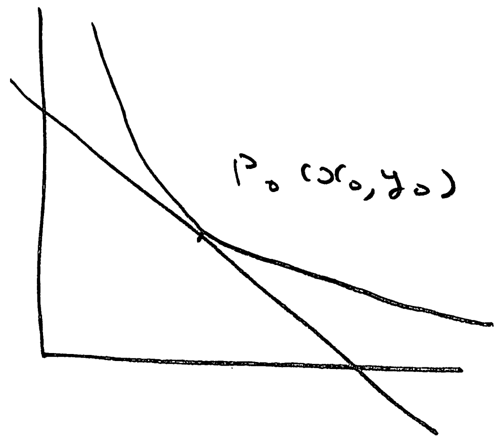
前提 ① $u_x(P),\ u_y(P) > 0 \quad (P \in \mathbb{R}^2_{++})$

② $$\begin{vmatrix} 0 & u_x(P) & u_y(P) \\ u_x(P) & & \\ u_y(P) & \multicolumn{2}{c}{H(u)(P)} \end{vmatrix} > 0$$

注 このとき uは狭義の準凹

$\bar{u} - u(x,y) = 0$ の下で $g(x,y) = xp + yq$ を最小化する. $\exists \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} p - \mu\, u_x(P_0) = 0 \\ q - \mu\, u_x(P_0) = 0 \\ \bar{u} - u(P_0) = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad px + qy > px_0 + qy_0$$

$$\left(\bar{u} - u(x,y) = 0, \quad (x,y) \neq (x_0, y_0) \right)$$

であった.

---

② から陰関数定理が使えて

$$\begin{cases} p - \mu \cdot u_x(x,y) = 0 \\ q - \mu \cdot u_y(x,y) = 0 \\ \bar{u} - u(x,y) = 0 \end{cases}$$

は解けて補償需要関数 $x = x^*(p, q, \bar{u})$, $y = y^*(p, q, \bar{u})$ を得る.

最小支出関数

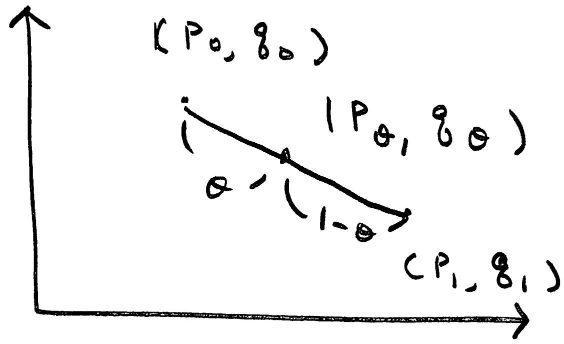
$$E(p, q, \bar{u}) = p\, x^*(p, q, \bar{u}) + q\, y^*(p, q, \bar{u})$$

を得る.

$\bar{u}$ を止めて p, q について考える

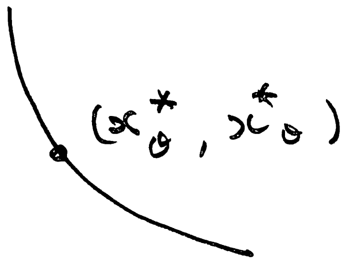
$$(p_\theta, q_\theta) = ((1-\theta)p_0 + \theta p_1,\ (1-\theta) q_0 + \theta q_1)$$

とする.



$$x^*_\theta = x^*(p_\theta, q_\theta, \bar{u})$$

$$y^*_\theta = y^*(p_\theta, q_\theta, \bar{u})$$



とおくと

$$u(x^*_\theta, y^*_\theta) = \bar{u}$$ ← 制約条件を満たしているということ

$$E(p_\theta, q_\theta, \bar{u}) = p_\theta x^*_\theta + q_\theta y^*_\theta$$

は

$$E(p_0, q_0, \bar{u}) \leq p_0 x^*_\theta + q_0 y^*_\theta$$

$$E(p_1, q_1, \bar{u}) \leq p_1 x^*_\theta + q_1 y^*_\theta$$

∵ E の定義から分かる.

$0<\theta<1$ のとき　$(1-\theta), \theta>0$ に注意する.

$$
\begin{aligned}
&(1-\theta)E(p_0, q_0, \bar{u}) + \theta E(p_1, q_1, \bar{u}) \\
&\leqq (1-\theta)p_0 x^*_\theta + (1-\theta) q_0 y^*_\theta \\
&\quad + \theta p_1 x^*_\theta + \theta q_1 y^*_\theta \\
&= ((1-\theta)p_0 + \theta p_1) x^*_\theta + ((1-\theta)q_0 + \theta q_1) y^*_\theta \\
&= p_\theta x^*_\theta + q_\theta y^*_\theta = E(p_\theta, q_\theta, \bar{u})
\end{aligned}
$$

から $E(p, q, \bar{u})$ は p, q について凹

開凸 $U \subset \mathbb{R}^2$, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$

に対し　f が凹 $\Leftrightarrow$ $f_{xx}(P), f_{yy}(P) \leqq 0$

$\det H(f)(P) \geqq 0$

$(P \in U)$

$E_{pp}, E_{qq} \leqq 0$ が従う.

$E_p = x^*(p, q, \bar{u})$, $E_q = y^*(p, q, \bar{u})$

から

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} \leqq 0, \quad \frac{\partial y^*}{\partial q} \leqq 0$$

が示される.