転置行列・2 次形式・座標の平行移動

Nobuyuki TOSE

経済数学, April 23, 2019

2次正方行列の転置

ベクトルの転置

$$ {}^t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (a_1\ \ a_2), \quad {}^t(a_1\ \ a_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} $$

2×2 行列の転置

2×2 行列 $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (\vec{p}\ \ \vec{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ に対して

$$ {}^tB = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p} \\ {}^t\vec{q} \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{x}\ \ {}^t\mathbf{y}) $$

公式

内積と転置

列ベクトル $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(\vec{p}, \vec{q}) = {}^t\vec{p} \cdot \vec{q}$$

すなわち

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = ax + by = (a\ \ b)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

重要な公式

$$\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tB\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right)$$

これがあるので転置行列を考えます.

重要な公式の証明

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{p} + y\vec{q}$$

に注意します．このとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \left(x\vec{p} + y\vec{q}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) \\
&= x\left(\vec{p}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) + y\left(\vec{q}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \left(\vec{p}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) \\ \left(\vec{q}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\ {}^t\vec{q}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{p} \\ {}^t\vec{q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tB\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

注意

2×2 行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + a_2 y \\ b_1 x + b_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \\ \mathbf{b} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \end{pmatrix}$$

2 変数 2 次関数・平行移動座標変換

$$z = x^2 - xy + y^2 + 4x + 6y$$

は $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ によって

$$z = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

と表現される．これを平行移動座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha} \quad ここで \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

を用いて表す（さらに $\vec{\alpha}$ を選んで簡単にする）．

2変数2次関数

$$
\begin{aligned}
z &= \left(A\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) \\
&= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) \\
&\qquad + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A\vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right)
$$

であることを用いると

$$
\begin{aligned}
z &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \\
&\qquad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\
&= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha})
\end{aligned}
$$

2 変数 2 次関数の標準形

ここで $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0$ すなわち A が正則であるので

$$\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) = -\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 16 \end{smallmatrix}\right)$$

が $2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$ を満たします．このとき

$$\begin{aligned} z &= \left(A\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)\right) + \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

2 次形式の正値性

2 次の対称行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & b \end{smallmatrix}\right)$ を考えます．このとき A の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2$$

は 2 実根 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ を持ちます．また A が定める 2 次形式

$$(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

について以下の定理が成立します．

定理

以下は同値です．**(1)** $(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) > 0 \ \left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}\right)$
(2) $a > 0$, $\det(A) > 0$
(3) $\alpha, \beta > 0$

2 次形式の正値性—応用

これを用いると $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ のとき

$$\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) > 0$$

となるので

$$z(X,Y) > z(X=0, Y=0) = \frac{1}{2}\left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -14 \\ -16 \end{pmatrix}\right) = -\frac{76}{3}$$

2 次形式の正値性（証明 1）

(2)⇒ (1)

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + by^2 - \frac{c^2}{a^2}y^2$$
$$= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0$$

が成立します．最後の不等式の等号成立の条件は

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{c}{a}y = y = 0$$
$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0$$

2 次形式の正値性（証明 2）

(1)⇒ (2)

$$ax^2 + 2cxy + by^2 \quad \left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \right)$$

において $x = 1, y = 0$ とすると $a > 0$ が従います．さらに

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \quad \left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \right) \qquad (*)$$

において $x = -\frac{c}{a}, y = 1$ とすると

$$\frac{ab - c^2}{a} > 0$$

から $\det(A) = ab - c^2 > 0$ であることが分かります．

2 次形式の正値性（証明 3）

注意

$p, q \in \mathbf{R}$ に対して

$$p, q > 0 \iff p + q > 0, pq > 0$$

(2) $\Rightarrow$ (3) 固有多項式 $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2$ の解と係数の関係を用いると

$$\alpha + \beta = a + b,\ \alpha\beta = ab - c^2 > 0$$

であることが分かる．$ab > c^2 \geq 0$ と $a > 0$ から $b > 0$ が従う．これから $\alpha + \beta = a + b > 0$ も従う．

2 次形式の正値性（証明 4）

(3) $\Rightarrow$ (2) 同様に

$$a + b = \alpha + \beta > 0, \ ab - c^2 = \alpha\beta > 0$$

であることが分かる．$ab > c^2 > 0$ と $a + b > 0$ から $a, b > 0$ が従う．
注意 対称行列の対角化を用いると直接 (1) $\Leftrightarrow$ (3) を示すことができます（後述）.