2019 年 10 月 01 日小テスト解答

$p, q, I > 0$ とします．効用関数

$$u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

を制約条件

$$g(x,y) := I - px - qy = 0$$

の下で最大化することを考えます．停留点を求めて，極大点であることを示しましょう．

解答 (x,y) で極大または極小とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - \lambda p &= 0 \quad \ldots\ldots(1) \\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - \lambda q &= 0 \quad \ldots\ldots(2) \\ I - px - qy &= 0 \quad \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1),(2) から

$$\begin{cases} \lambda p &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \quad \ldots\ldots(1)' \\ \lambda q &= \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots(2)' \end{cases}$$

が従います．(1)’/(2)’ から

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x} \quad 従って \quad px = \frac{1}{2}qy$$

となります．これを (3) に代入すると

$$I - \frac{1}{2}qy - qy = I - \frac{3}{2}qy = 0$$

から

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

と需要関数が求まります．未定乗数，すなわち所得の限界効用関数は

$$\lambda = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{q}\cdot\left(\frac{\frac{I}{3p}}{\frac{2I}{3q}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}}$$

となります．$L = u + \lambda g = u + \lambda(I - px - qy)$ とすると

$$L_x = u_x - p, \quad L_y = u_y - q$$

となります．従って

$$\begin{aligned} L_{xx} &= u_{xx} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}} \\ L_{xy} &= u_{xy} = \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \\ L_{yy} &= u_{yy} = -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} B(x,y,\lambda) &= \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \\ -q & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}\cdot q^2 + \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}\cdot pq \\ &\quad + \frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}\cdot p^2 > 0 \end{aligned}$$

から u は制約条件の下で停留点 $(x,y) = \left(\frac{I}{3p}, \frac{2I}{3q}\right)$ で極大であることが分かります．

注意 間接効用関数を

$$\begin{aligned} v(p,q,I) &= u(x(p,q,I), y(p,q,I)) \\ &= \left(\frac{I}{3p}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2I}{3q}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{I}{\sqrt[3]{pq^2}} \end{aligned}$$

と求めると

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

が成立します．

2019 年 10 月 8 日演習問題

I $p, q, I, \bar{u} > 0$ とします．
(1) $u(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ とします．制約条件

$$g_1(x,y) := \bar{u} - u(x,y) = 0$$

の下で $f(x,y) = px + qy$ を考えます．停留点を求めましょう．
(2) 制約条件 $g_2(x,y) := I - px - qy = 0$ の下で $u(x,y)$ を最大化します．停留点を求めましょう．

解答 (1) $(x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}$ で極小であるとすると

$$\begin{cases} p - \mu \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 0 & \cdots(1) \\ q - \mu \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = 0 & \cdots(2) \\ \bar{u} - x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 0 & \cdots(3) \end{cases}$$

を満たす $\mu \in \mathbf{R}$ が存在します．さらに (1) $\times\, x$ と (2) $\times\, y$ から

$$2px = \mu\bar{u}, \quad 2qy = \mu\bar{u}$$

から $px = qy$ が従います．$y = \frac{px}{q}$ を (3) に代入すると

$$x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{px}{q}\right)^{\frac{1}{2}} = \bar{u} \quad \text{から} \quad x = \bar{u}\sqrt{\frac{q}{p}}$$

が従います．同様に

$$y = \bar{u}\sqrt{\frac{p}{q}}$$

が成立します．このとき $\frac{x}{y} = \frac{q}{p}$ から Lagrange 未定乗数は

$$\mu = 2px^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{pq}$$

となります．

(2) $(x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}$ で極大であるとすると

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + \lambda(-p) = 0 & \cdots(1) \\ \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + \lambda(-q) = 0 & \cdots(2) \\ I - px - qy = 0 & \cdots(3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．(1) において $\lambda = 0$ とすると $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 0$ となりますが $x, y > 0$ であることに反します．よって $\lambda \neq 0$ であることが分かります．

さらに (1) $\times\, x$ と (2) $\times\, y$ から

$$\lambda px = \lambda qy = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

となります．これから $px = qy$ が従います．ここで (3) を用いると

$$px = qy = \frac{I}{2}$$

から

$$x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

が従います．このとき所得の限界効用関数は

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{px} \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{I} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{I}{2p}} \sqrt{\frac{I}{2q}} = \frac{1}{2\sqrt{pq}} \end{aligned}$$

となります．

注意 間接効用関数は

$$v(p,q,I) = \left(\frac{I}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{I}{2q}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}$$

となりますが，

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

が成立することに注意しましょう．

II I によって得られた Higgs 型（補償）需要関数を

$$x^*(p,q,\bar{u}),\ y^*(p,q,\bar{u})$$

とします．最小支出関数

$$E(p,q,\bar{u}) = px^*(p,q,\bar{u}) + qy^*(p,q,\bar{u})$$

と定めるとき，マッケンジーの補題

$$\frac{\partial E}{\partial p}(p,q,\bar{u}) = x^*(p,q,\bar{u}), \quad \frac{\partial E}{\partial q}(p,q,\bar{u}) = y^*(p,q,\bar{u})$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\begin{aligned} E(p,q,\bar{u}) &= p\cdot\bar{u}\sqrt{\frac{q}{p}} + q\cdot\bar{u}\sqrt{\frac{p}{q}} \\ &= 2\bar{u}\sqrt{pq} \end{aligned}$$

となります．このとき

$$\begin{aligned} E_p &= 2\bar{u}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\sqrt{q} = \bar{u}\sqrt{\frac{q}{p}} = x^*(p,q,\bar{u}) \\ E_q &= 2\bar{u}\cdot\sqrt{p}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{q}} = \bar{u}\sqrt{\frac{p}{q}} = y^*(p,q,\bar{u}) \end{aligned}$$

III

I(2) で求めたように，$I - px - qy = 0$ の下で $u(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ を最大化して需要関数

$$x(p,q,I) = \frac{I}{2p},\ y(p,q,I) = \frac{I}{2q},$$

を得たとします．間接効用関数を

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), y(p,q,I))$$

と定めるとき，以下が成立することを具体的に計算して示しましょう．

(1)

$$x^*(p,q,\bar{u}) = x(p,q,E(p,q,\bar{u}))$$

(2)

$$x(p,q,I) = x^*(p,q,v(p,q,I))$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \bar{u}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I)) = I$$

解答 (1)

$$x(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{2\bar{u}\sqrt{pq}}{2p} = \bar{u}\sqrt{\frac{q}{p}} = x^*(p,q,\bar{u})$$

(2)

$$v(p,q,I) = \sqrt{x(p,q,I)\cdot y(p,q,I)} = \sqrt{\frac{I}{2p}}\cdot\sqrt{\frac{I}{2q}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}$$

が成立します．他方

$$x^*(p,q,v(p,q,I)) = \frac{I}{2\sqrt{pq}}\cdot\sqrt{\frac{q}{p}} = \frac{I}{2p} = x(p,q,I)$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{2\bar{u}\sqrt{pq}}{2\sqrt{pq}} = \bar{u}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I)) = 2\cdot\frac{I}{2\sqrt{pq}}\cdot\sqrt{pq} = I$$

IV $p,q,I,\bar{u}>0$ とします．
(1) $u(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ とします．制約条件

$$g_1(x,y) := \bar{u} - u(x,y) = 0$$

の下で $f(x,y)=px+qy$ を考えます．停留点を求めましょう．
(2) 制約条件 $g_2(x,y) := I-px-qy=0$ の下で $u(x,y)$ を最大化します．停留点を求めましょう．

解答 (1) $(x,y)\in\mathbf{R}^2_{++}$ で極小であるとすると

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} p & - & \mu\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} & = & 0 \quad\cdots(1)\\ q & - & \mu\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{1}{1}}y^{-\frac{1}{3}} & = & 0 \quad\cdots(2)\\ & & \bar{u}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} & = & 0 \quad\cdots(3)\end{array}\right.$$

を満たす $\mu\in\mathbf{R}$ が存在します．(1) において $\mu=0$ とすると $p=0$ となり，$p>0$ に反しますから $\mu\neq 0$ が成立します．さらに (1) $\times\, x$ と (2) $\times\, y$ から

$$3px=\mu\bar{u},\quad 3qy=2\mu\bar{u}$$

から $2px=qy$ が従います．$y=\frac{2px}{q}$ を (3) に代入すると

$$x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2px}{q}\right)^{\frac{2}{3}}=\bar{u}\quad から\quad x=\bar{u}\left(\frac{q}{2p}\right)^{\frac{2}{3}}$$

が従います．同様に

$$y=\bar{u}\left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{1}{3}}$$

が成立します．このとき $\frac{x}{y}=\frac{q}{2p}$ から Lagrange 未定乗数は

$$\mu=\frac{3px}{\bar{u}}=3p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}$$

となります．

(2) $(x,y)\in\mathbf{R}^2_{++}$ で極大であるとすると

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} & + & \lambda(-p) & = & 0 \quad\cdots(1)\\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} & + & \lambda(-q) & = & 0 \quad\cdots(2)\\ & & I-px-qy & = & 0 \quad\cdots(3)\end{array}\right.$$

を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．(1) において $\lambda=0$ とすると $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=0$ となりますが $x,y>0$ であ

ることに反します．よって $\lambda \neq 0$ であることが分かります．

さらに (1) $\times x$ と (2) $\times y$ から

$$3\lambda px = \frac{3}{2} \cdot \lambda qy = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

となります．これから $px = \frac{1}{2} qy$ が従います．ここで (3) を用いると

$$px = \frac{I}{3}, \quad qy = \frac{2I}{3}$$

から

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

が従います．このとき所得の限界効用関数は

$$\lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} \cdot \frac{1}{p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}}}$$

となります．

注意 間接効用関数は

$$v(p,q,I) = \left(\frac{I}{3p}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2I}{3q}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} \cdot \frac{I}{p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}}} \tag{27}$$

となりますが，

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

が成立することに注意しましょう．

V IV によって得られた Higgs 型（補償）需要関数を

$$x^*(p,q,\bar{u}),\ y^*(p,q,\bar{u})$$

とします．最小支出関数

$$E(p,q,\bar{u}) = px^*(p,q,\bar{u}) + qy^*(p,q,\bar{u})$$

と定めるとき，マッケンジーの補題

$$\frac{\partial E}{\partial p}(p,q,\bar{u}) = x^*(p,q,\bar{u}), \quad \frac{\partial E}{\partial q}(p,q,\bar{u}) = y^*(p,q,\bar{u})$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$E(p,q,\bar{u}) = p \cdot \left(\frac{q}{2p}\right)^{\frac{2}{3}} \bar{u} + q \cdot \left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \bar{u} \qquad = \frac{3}{2} (2p)^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u}$$

となります．このとき

$$E_p = \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} p^{-\frac{2}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u} = (2p)^{-\frac{2}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u} = x^*(p,q,\bar{u})$$
$$E_q = \frac{3}{2} (2p)^{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} q^{-\frac{1}{3}} \bar{u} = (2p)^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}} \bar{u} = y^*(p,q,\bar{u})$$

VI IV(2) で求めたように，$I-px-qy=0$ の下で $u(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ を最大化して需要関数

$$x(p,q,I)=\frac{I}{3p},\ y(p,q,I)=\frac{2I}{3q},$$

を得たとします．間接効用関数を

$$v(p,q,I)=u(x(p,q,I),y(p,q,I))$$

と定めるとき，以下が成立することを具体的に計算して示しましょう．

(1) $x^*(p,q,\bar{u})=x(p,q,E(p,q,\bar{u}))$

(2) $x(p,q,I)=x^*(p,q,v(p,q,I))$

(3) $v(p,q,E(p,q,\bar{u}))=\bar{u}$

(4) $E(p,q,v(p,q,I))=I$

解答 **(1)**

$$\begin{aligned}
x(p,q,E(p,q,\bar{u}))&=\frac{1}{3p}\cdot\frac{2}{3}(2p)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}\bar{u}=(2p)^{-\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}}\bar{u}\\
y(p,q,E(p,q,\bar{u}))&=\frac{2}{3q}\cdot\frac{3}{2}(2p)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}\bar{u}=(2p)^{\frac{1}{3}}q^{-\frac{1}{3}}\bar{u}=y^*(p,q,\bar{u})
\end{aligned}$$

(2) IV の (**??**) から

$$v(p,q,I)=\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{I}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}}$$

が成立します．他方

$$\begin{aligned}
x^*(p,q,v(p,q,I))&=\left(\frac{q}{2p}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{I}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}}=\frac{I}{3p}=x(p,q,I)\\
y^*(p,q,v(p,q,I))&=\left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{I}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}}=\frac{2I}{3q}=x(p,q,I)
\end{aligned}$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u}))=\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{1}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{3}{2}(2p)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}\bar{u}=\bar{u}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I))=\frac{3}{2}(2p)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{I}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}}=I$$