

偏微分係数と極大・極小の必要条件

Nobuyuki TOSE

April 16, 2018

ミクロ経済学における基本的な問題

ミクロ経済学では最初に以下の基本的な問題を学びます。

- 生産理論 (Production Theory)
- 消費者理論 (Consumer Theory)

生産理論 (Production Theory)

生産物 (product) C が生産要素 (production elements) A, B から生産されるとします. A, B, C の価格はそれぞれ p, q, r とします. A と B をそれぞれ x と y 投入するとき C が $z = f(x, y)$ 得られるとします.

このとき $f(x, y)$ を生産関数 (production function) と呼ばれます. またこの状況で利潤関数 (profit function) を

$$\pi(x, y) = rf(x, y) - px - qy$$

と定義します.

生産理論の最初のステップは, 利潤関数 $\pi(x, y)$ を最大化して生産要素需要関数

$$x = x(p, q, r), y = y(p, q, r)$$

を求めることにあります.

消費者理論 (Consumer Theory)

商品 (Goods) A, B があるとします。 A を x , B を y 購入するとき、消費者が効用関数 (utility function) $u(x, y)$ の効用を得るとします。 さらに A, B の価格が p, q であるとします。

消費者が予算 I を全額消費して A, B を購入するとします。 ここでの問題は予算制約と呼ばれる制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で $u(x, y)$ を最大化して需要関数 (demand function)

$$x = x(p, q, I), y = y(p, q, I)$$

と所得の限界効用 (marginal utility of income)

$$\lambda = \lambda(p, q, I)$$

を得ることで。

開円盤 CT 246p

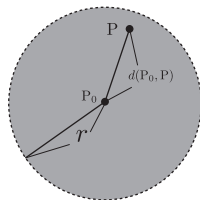
開円盤 (Open Disc)

$r > 0, P_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$B_r(P_0) := \{P \in \mathbf{R}^2; d(P, P_0) < r\}$$

を中心 P_0 , 半径 $r > 0$ の開円盤と呼びます. ここで $d(P_0, P)$ は 2 点 P_0, P の距離です. $P(x, y)$ のとき

$$d(P_0, P) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$



注意今後「 P_0 の近くで～」という言い方をしますが、これはある正数 $r > 0$ に対して

任意の $P \in B_r(P_0)$ において～

開集合 (Open subsets) CT 246p

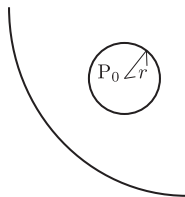
Definition

\mathbf{R}^2 の部分集合 U があるとします. U が開集合であるとは任意の $P_0 \in U$ に対して $r > 0$ が存在して

$$B_r(P_0) := \{P \in \mathbf{R}^2; d(P, P_0) < r\} \subset U$$

が成立することです.

注意 U の任意の点 P_0 の周りが U に含まれているということです.



開集合の例

以下の \mathbf{R}^2 の部分集合は開集合です.

- \mathbf{R}^2
- 上半平面

$$U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y > 0\}$$

- 第1象限 (1st Quadrant)

$$\mathbf{R}_{++}^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x, y > 0\}$$

- 開円盤

$$B_r(P_0) := \{P \in \mathbf{R}^2; d(P, P_0) < r\}$$

開集合-反例

以下の \mathbf{R}^2 の部分集合は開集合ではありません。

- $P_0 \in \mathbf{R}^2$ のなす集合 $\{P_0\}$
- 閉上半平面

$$F_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \geq 0\}$$

- 閉第1象限

$$\overline{\mathbf{R}_{++}^2} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x, y \geq 0\}$$

- 閉円盤

$$\overline{B_r(P_0)} := \{P \in \mathbf{R}^2; d(P, P_0) \leq r\}$$

Partial Differentiation

\mathbf{R}^2 の開集合 U 上の関数

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}$$

が定義されているとします。

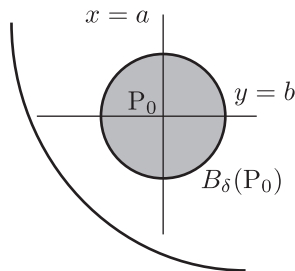
$P_0(a, b) \in U$ に対して x の関数

$$F(x) := f(x, b)$$

を $x = a$ の近くで定義できます。さらに y の関数

$$G(y) := f(a, y)$$

を $y = b$ の近くで定義することができます。



Partial Differentiation

この状況で、定義の中の極限が存在すれば、 x と y に関する偏微分係数を

$$f_x(a, b) := F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

$$f_y(a, b) := G'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

と定義できます。

Partial Differentiation-An example

\mathbf{R}^2 上の関数

$$f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$$

について考えます. $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ の周りで考えるとして

$$F(x) := f(x, b) = x^3 + 2xb^2 + b^3, \quad G(y) := f(a, y) = a^3 + 2ay^2 + y^3$$

と定義します. このとき

$$F'(x) = 3x^2 + 2b^2, \quad \text{and} \quad G'(y) = 4ay + 3y^2$$

から

$$f_x(a, b) = 3a^2 + 2b^2, \quad f_y(a, b) = 4ab + 3b^2$$

を得ます.

1変数の極大点（極小点）-定義

开区間 $]a, b[$ 上の関数 $f :]a, b[\Rightarrow \mathbf{R}$ が与えられているとき

f が $t = c$ で極小（resp. 極大）

\Leftrightarrow ある $\delta > 0$ に対して f が $]c - \delta, c + \delta[$ 上最小（resp. 最大）

\Leftrightarrow ある $\delta > 0$ に対して

$$f(t) \geq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

$$\text{resp. } f(t) \leq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

1変数の極大点（極小点） CT 104-105p

微分可能な1変数関数の極小点（極大点）に関する次の定理を紹介します。

Theorem

微分可能な関数 $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ があるとします。 f が $c \in]a, b[$ で極小（極大）ならば

$$f'(c) = 0$$

注意 これは中身を理解して欲しい定理です。

Minimal (Maximal) Points CT 268p

\mathbf{R}^2 の開集合 U 上の関数

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}$$

に対して, f が $P_0(a, b)$ で極小 (resp. 極大) であるとはある $\delta > 0$ が存在して

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad ((x, y) \in B_\delta(P_0))$$

(resp.

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad ((x, y) \in B_\delta(P_0))$$

)

が成立するときです.

Minimal (Maximal) Points–Theorem CT 269p

\mathbf{R}^2 の開集合 U 上の関数

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}$$

が U の各点 $P \in U$ で x, y について偏微分できると仮定します.

Theorem

f が $P_0(a, b) \in U$ で極小 (極大) ならば

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \tag{1}$$

が成立します.

この状況で (1) を満たす点 $P_0(a, b)$ を f の停留点と呼びます.

Minimal (Maximal) Points–Sketch of proof

f が $P_0(a, b)$ で極小とします. このとき $F(x) = f(x, b)$ は $x = a$ で極小となります. 実際

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad ((x, y) \in B_\delta(P_0))$$

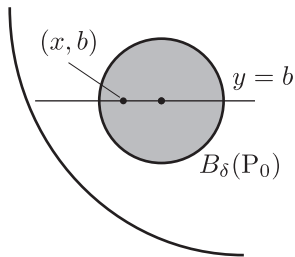
から $f(x, b) \geq f(a, b) \quad (a - \delta < x < a + \delta)$
従って

$$F(x) \geq F(a) \quad (a - \delta < x < a + \delta)$$

となります. よって

$$F'(a) = 0 \quad \text{従って} \quad f_x(a, b) = 0$$

であることが分かります.



Minimal (Maximal) Points—An example

関数

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$$

について考えます.

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 2x + 4y \cdot 1 + 0 - 6 - 0 \\ &= 2x + 4y - 6 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &= 0 + 4x \cdot 1 + 4y - 0 - 8 \\ &= 4x + 4y - 8 = 0\end{aligned}$$

を解くと, $(x, y) = (1, 1)$ が f の唯一の停留点であることが分かります.

クラメールの公式 CT 205-206p

連立1次方程式

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \cdots (1) \\ cx + dy = \beta \cdots (2) \end{cases}$$

を考える. y を消去するために $(1) \times d - (2) \times b$ を考える.

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad adx \quad + \quad bdy \quad = \quad \alpha d \\ -) \quad \quad \quad bcx \quad + \quad bdy \quad = \quad \beta b \\ \hline (ad - bc)x \quad \quad \quad = \quad \alpha d - \beta b \end{array}$$

x を消去するために $(1) \times c - (2) \times a$ を考える.

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad acx \quad + \quad bcy \quad = \quad \alpha c \\ -) \quad \quad \quad acx \quad + \quad ady \quad = \quad \beta a \\ \hline (bc - ad)y \quad \quad \quad = \quad \alpha c - \beta a \end{array}$$

行列式・クラメールの公式

行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

これを用いると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

特に $D := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

これをクラメールの公式と言います。

クラメールの公式-例

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 4x + 4y = 8 \end{cases}$$

を解きます.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -8 \neq 0$$

からクラメールの公式が適用できます. 実際

$$x = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(6 \cdot 4 - 8 \cdot 4) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

$$y = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$