# 線型独立・線型従属（簡単な場合）

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec01，2019 年 06 月 07 日 at Komaba

# 連立方程式の非自明解の存在定理

**定理 1 連立 1 次方程式**

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{Leq}$$

には $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}$ を満たす解（非自明解）が存在します.

# 連立方程式の非自明解の存在定理–証明 (1)

- $D := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき(Leq) から

$$x = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}, \quad y = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

従って $z = D \neq 0$ として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が非自明解である.

**II** $D := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ のとき

$\exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を満たす．これから

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

# 線型独立・線型従属

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0$$

が成立するならば $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は線型独立（1 次独立）であるといいます．
線型独立でないとき，すなわち $\exists\lambda, \mu, \gamma \in \mathbf{K}$ に対して

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が成立するとき $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は線型従属（1 次従属）であるといいます．

**定理 2** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^2$ は線型従属となります.

定理 2 をさらに一般化します．そのために $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^n$ が条件

$$\vec{p} \nparallel \vec{q}$$

を満たすと仮定します．このとき

$$V = L(\vec{p}, \vec{q}) := \{x\vec{p} + y\vec{q} \in \mathbf{K}^n;\ x, y \in \mathbf{K}\}$$

を $\vec{p}, \vec{q}$ が基底である 2 次元部分空間であるといいます．($\vec{p} \nparallel \vec{q}$ を仮定しないときは $\vec{p}, \vec{q}$ が生成する部分空間とよびます).

# 定理 1 の応用 (2)

定理 3 $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^n$ が $\vec{p} \not\parallel \vec{q}$ を満たすならば, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \in V = L(\vec{p}, \vec{q})$ は線型従属となります.

$$\vec{r}_j = a_j \vec{p} + b_j \vec{q}_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

となります．従って

$$(\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3) = (\vec{p} \ \vec{q}) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

において

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{K}$ が存在します.

# 定理 1 の応用 (3)

以下では単に $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^n$ とします（必ずしも $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ を仮定しません）．定理 3 の証明で $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ は使っていません．

**定理 4** $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^n$ とします．$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \in V = L(\vec{p}, \vec{q})$ は線型従属となります．

**補題** $a, b \in \mathbf{R}$ に対して

$$ax + by = 0, \quad \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}$$

を満たす $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{K}^2$ が存在します.

証明できますか？

# 定理 1 の別証明 (2)

**(i)** $a_1 = b_1 = 0$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

**(ii)** $a_1 = \neq 0$ のとき（$b_1 \neq 0$ の場合も同様）

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 & b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

において

$$\left( b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 \right) y + \left( b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 \right) z = 0$$

を満たす $\left( \begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix} \right) \neq \vec{0}$ が存在します.

$$x = -\frac{1}{a_1} (a_2 y + a_3 z)$$

## 定理 1 の拡張

**定理 1 EXT** 連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \text{(Leq2)}$$

には $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ を満たす解（非自明解）が存在します.

証明できますか？

# 定理 2, 定理 4 の拡張

**定理 2 EXT** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \in \mathbf{K}^3$ は線型従属になります．すなわちある $\vec{x} \in \mathbf{K}^4$ に対して

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 = \vec{0}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

**定理 4 EXT** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

は線型従属となります.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ が線型独立とします．ここで

$$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

とします．このとき

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

と表されます．このとき

$$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\text{が線型独立} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

# 基底変換, 座標変換—3 次元の部分空間の場合 (2)

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が線型独立とします．このとき

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q} + \zeta\vec{r}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

これは

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$