追加演習問題および解答

I（教科書 20p. 演習 1.2.4 の拡張）
次の $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$L = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます．条件

$$||\vec{p}|| = ||\vec{q}|| = 1,\ (\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

を満たす $\vec{p}, \vec{q} \in L$ を求めましょう．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　**(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　**(4)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答　**(1)** $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．
(2) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．

(3) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}=-\frac{1}{4}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．

(4) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}=\frac{2}{4}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．

II（I の続き）I の $\vec{p},\vec{q}$ を用いて

$$||\vec{c}-x\vec{a}-y\vec{b}||^2$$

を最小にする $x,y\in\mathbf{R}$ を求めましょう．

(1) $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ **(4)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

解答 $\vec{p},\vec{q}$ と $\vec{a},\vec{b}$ の間に関係

$$\begin{aligned}\vec{p}&=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}\\ \vec{q}&=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\left(\vec{b}-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}\right)\end{aligned}$$

があることに注意しましょう．従って

$$(\vec{p}\ \vec{q})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}\frac{1}{||\vec{a}||} & -\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\cdot\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\\ 0 & \frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\end{pmatrix}$$

が成立します．この等式の右辺に現れる行列を S とすると S は正則となります．

$$\begin{aligned}\xi\vec{p}+\eta\vec{q}&=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})S\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\\ &=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$S\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad 従って\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=S^{-1}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

が成立します．以上から任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して一意的に $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ が存在して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$$

が成立します．以下ではこのことを用います．すなわち

$$\begin{aligned} ||\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2 &= ||\vec{c} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}||^2 \\ &= ||\vec{c}||^2 + \xi^2||\vec{p}||^2 + \eta^2||\vec{q}||^2 - 2\xi(\vec{c},\vec{p}) - 2\eta(\vec{c},\vec{q}) \\ &= ||\vec{c}||^2 + \xi^2 - 2\xi(\vec{c},\vec{p}) + +\eta^2||\vec{q}||^2 - 2\eta(\vec{c},\vec{q}) \\ &= (\xi - (\vec{c},\vec{p}))^2 + (\eta - (\vec{c},\vec{q}))^2 + ||\vec{c}||^2 - (\vec{c},\vec{p})^2 - (\vec{c},\vec{q})^2 \end{aligned}$$

から

$$\xi = (\vec{c},\vec{p}), \quad \eta = (\vec{c},\vec{q})$$

のとき $||\vec{x} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}||^2$ は最小となります．

(1)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = -\frac{5}{\sqrt{42}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned} x\vec{a} + y\vec{b} &= \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{42}} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 1 & 1 & \frac{3}{14} \\ 1 & -1 & -\frac{13}{14} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 0 & -1 & \frac{5}{14} \\ 0 & -3 & -\frac{15}{14} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} \\ 0 & -3 & -\frac{15}{14} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{8}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$x = \frac{6}{7}, \quad y = -\frac{5}{14}$$

であることが分かります.

注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{42}}\cdot\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{42}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{5}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\ -\frac{5}{14}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

(2)

$$\vec{p}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$\xi=\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \eta=\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}\right)=\frac{3}{\sqrt{34}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned}x\vec{a}+y\vec{b}&=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\\ &=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\ 6\\ 13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{4}{17}\\ 0 & 2 & \frac{6}{17}\\ -1 & 1 & -\frac{13}{17}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{4}{17}\\ 0 & 2 & \frac{6}{17}\\ 0 & 3 & -\frac{9}{17}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{4}{17}\\ 0 & 1 & \frac{3}{17}\\ 0 & 3 & -\frac{9}{17}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -\frac{10}{17}\\ 0 & 1 & \frac{3}{17}\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$x=-\frac{10}{17},\quad y=\frac{3}{17}$$

であることが分かります.

注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{34}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{3}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{10}{17}\\ \frac{3}{17}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

(3)

$$\vec{p}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$$

であることがIで示されています．これから

$$\xi=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2},\quad \eta=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}\right)=\frac{5}{\sqrt{44}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned}x\vec{a}+y\vec{b}&=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{\sqrt{44}}\cdot\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}9\\4\\-1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&\frac{9}{11}\\1&0&\frac{4}{11}\\1&-1&-\frac{1}{11}\\-1&1&\frac{1}{11}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}0&1&\frac{5}{11}\\1&0&\frac{4}{11}\\0&1&-\frac{5}{11}\\0&-1&\frac{5}{11}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{4}{11}\\0&1&\frac{5}{11}\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

から

$$x=\frac{4}{11},\quad y=\frac{5}{11}$$

であることが分かります．

注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{4}{\sqrt{44}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\\0&\frac{4}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{44}}\\0&\frac{4}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{44}}\\0&\frac{4}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{11}\\\frac{5}{11}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます．

(4)

$$\vec{p}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$\xi=\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{2},\quad \eta=\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}\right)=\frac{3}{\sqrt{20}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned}x\vec{a}+y\vec{b}&=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{3}{\sqrt{20}}\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\\7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-\frac{1}{10}\\1&0&-\frac{4}{10}\\1&2&\frac{2}{10}\\-1&1&\frac{7}{10}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}0&1&\frac{3}{10}\\1&0&-\frac{4}{10}\\0&2&\frac{6}{10}\\0&1&\frac{3}{10}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-\frac{4}{10}\\0&1&\frac{3}{10}\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

から

$$x=-\frac{4}{10},\quad y=-\frac{3}{10}$$

であることが分かります.

注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{20}}\\0&\frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{20}}\\0&\frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{10}\\\frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

III $\vec{x},\vec{y}\in\mathbf{R}^n$ が平行でないとします。このとき

$$\vec{x}\not\parallel\lambda\vec{x}+\vec{y},\quad\vec{x}+\vec{y}\not\parallel\vec{x}-\vec{y}$$

であることを示しましょう.

解答

$$c_1\vec{x}+c_2\left(\lambda\vec{x}+\vec{y}\right)=\left(c_1+\lambda c_2\right)\vec{x}+c_2\vec{y}=\vec{0}$$

とします．このとき $\vec{x} \nparallel \vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 + \lambda c_2 = 0 \\ \quad\quad\; c_2 = 0 \end{cases}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

に注意すると $c_1 = c_2 = 0$ が従います．従って

$$\vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y}$$

であることが分かります．他方

$$c_1(\vec{x}+\vec{y}) + c_2(\vec{x}-\vec{y}) = (c_1+c_2)\vec{x} + (c_1-c_2)\vec{y} = \vec{0}$$

とします．このとき $\vec{x} \nparallel \vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

に注意すると $c_1 = c_2 = 0$ が従います．従って

$$\vec{x}+\vec{y} \nparallel \vec{x}-\vec{y}$$

であることが分かります.

IV $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ は平行でないとします：

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$

このとき

$$\vec{\alpha} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad \vec{\beta} = z\vec{a} + w\vec{b}$$

とするとき

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \neq 0$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\begin{aligned} c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} &= c_1(x\vec{a} + y\vec{b}) + c_2(z\vec{a} + w\vec{b}) \\ &= (xc_1 + zc_2)\vec{a} + (yc_1 + wc_2)\vec{b} = \vec{0} \end{aligned}$$

とします．$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\begin{cases} xc_1 + zc_2 &= 0 \\ yc_1 + wc_2 &= 0 \end{cases} \tag{\#}$$

が従います．

ここで $\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ ならば (#) から $c_1 = c_2 = 0$ が導けますから

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$$

が従います．他方

$$\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| = 0$$

ならば (#) を満たす $c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ で $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ を満たすものが存在して

$$c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} = \vec{0}$$

が成立します．これは

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

を意味します．