第4章　2次元の座標変換・2次正方行列・2変数の2次形式

4.1　座標変換

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$$

が条件

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \tag{4.1}$$

を満たしているとします．この条件は

$$D := |\vec{a}\ \vec{b}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \tag{4.2}$$

と必要十分であることはすでに証明しました．まず任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$ が与えられるとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{a} + \eta\vec{b}$$

と表すことを考えましょう．この条件は成分で考えると

$$\begin{cases} \xi a_1 + \eta b_1 = x \\ \xi a_2 + \eta b_2 = y \end{cases}$$

において (4.2) が成立するので

$$\xi = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x & b_1 \\ y & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}(xb_2 - yb_1), \quad \eta = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & x \\ a_2 & y \end{vmatrix} = \frac{1}{D}(ya_1 - xa_2)$$

とすればよいことが分かります．以上で

$$\varphi:\ \mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K}^2 \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \xi\vec{a} + \eta\vec{b}$$

が全射であることが示されました．さらにおの写像 φ は単射でもあります．そのために仮定している条件 (4.1) が

$$c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow c_1=c_2=0$$

に他ならないことに注意しましょう．すると

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\\eta_1\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}\xi_2\\\eta_2\end{pmatrix}\right)$$

を

$$\xi_1\vec{a}+\eta_1\vec{b}=\xi_2\vec{a}+\eta_2\vec{b}$$

と読み換えると，この条件は

$$(\xi_1-\xi_2)\vec{a}+(\eta_1-\eta_2)\vec{b}=\vec{0}$$

に他ならないので

$$\xi_1=\xi_2,\quad \eta_1=\eta_2\quad i.e.\quad \begin{pmatrix}\xi_1\\\eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_2\\\eta_2\end{pmatrix}$$

が従います．以上で φ が単射でもあることが示されました．

この φ は $\vec{a},\ \vec{b}$ による座標変換と呼びます．

4.2　2 次正方行列

$$A=(\vec{a}\ \vec{b})=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$$

を列ベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ を束ねる (bundle)2 次正方行列と呼びます．A には右から 2 次元列ベクトルを以下のように掛けることができます．

$$A\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\xi\vec{a}+\eta\vec{b}=\begin{pmatrix}\xi a_1+\eta b_1\\ \xi a_2+\eta b_2\end{pmatrix}$$

さらに以下の様に

$$C=(\vec{c}\ \vec{d})=\begin{pmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$$

を A に掛けることができます．

$$AC=(A\vec{c}\ A\vec{d})=(c_1\vec{a}+c_2\vec{b}\ d_1\vec{a}+d_2\vec{b})$$

このように

$$2\text{ 次正方行列}\times 2\text{ 次正方行列}=2\text{ 次正方行列}$$

となることが分かります．ここで

$$M_2(\mathbf{K}) := \{A : \ \mathbf{K}\text{値の2次正方行列}\}$$

と集合を定義すると，写像

$$M_2(\mathbf{K}) \times M_2(\mathbf{K}) \longrightarrow M_2(\mathbf{K}) \quad (A, C) \mapsto AC$$

が定まります．

行列の積について基本的な性質を説明していきます．

定理 4.1. $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{K}^2$ に対して

$$A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w}, \quad A(\lambda\vec{v}) = \lambda(A\vec{v})$$

が成立します．

Proof.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} A(\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = (v_1 + w_1)\vec{a} + (v_2 + w_2)\vec{b} \\ &= (v_1\vec{a} + v_2\vec{a}) + (w_1\vec{a} + w_2\vec{b}) = A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= A\vec{v} + A\vec{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\lambda\vec{v}) &= A\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} = (\lambda v_1)\vec{a} + (\lambda v_2)\vec{b} \\ &= \lambda(v_1\vec{a} + v_2\vec{b}) = \lambda(A\vec{v}) \end{aligned}$$

□

系 4.1.

$$A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda A\vec{v} + \mu A\vec{w}$$

この系を用いると写像

$$\varphi : \ \mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K}^2 \quad \vec{v} \mapsto A\vec{v}$$

は

$$\varphi(\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{v})+\mu\varphi(\vec{w})$$

を満たすことが従います．これを行列 A が定める写像 φ の**線型性**と呼びます．

行列の積についてはいくつもの性質を学ぶ必要がありますが，次の**結合則**が大事です．

定理 4.2. **(1)**

$$(AC)\vec{v} = A(C\vec{v})$$

(2) $F \in M_2(\mathbf{K})$ とすると

$$(AC)F = A(CF)$$

Proof. **(1)**

$$\begin{aligned} A(C\vec{v}) &= A(v_1\vec{c}+v_2\vec{d}) \\ &= v_1A\vec{c}+v_2A\vec{d} \\ &= (A\vec{c}\ A\vec{d})\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (AC)\vec{v} \end{aligned}$$

(2) $F = (\vec{f_1}\ \vec{f_2})$ と F を列ベクトルで表現すると

$$\begin{aligned} (AC)F &= ((AC)\vec{f_1}\ (AC)\vec{f_2}) = (A(C\vec{f_1})\ A(C\vec{f_2})) \\ &= A(C\vec{f_1}\ C\vec{f_2}) = A(CF) \end{aligned}$$

と証明されます． □

続いて 2 次正方行列の和とスカラー倍を

$$A+C = (\vec{a}\ \vec{b})+(\vec{c}\ \vec{d}) = (\vec{a}+\vec{c}\ \vec{b}+\vec{d}) = \begin{pmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \lambda(\vec{a}\ \vec{b}) = (\lambda\vec{a}\ \lambda\vec{b}) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 \end{pmatrix}$$

と定義します．

最後に特殊な行列をいくつか定義します．すなわち

$$O_2 = (\vec{0}\ \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をそれぞれ零行列，単位行列と呼びます．$A \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$AO_2 = O_2A = O_2, \quad A + O_2 = O_2 + A = A$$

$$AI_2 = I_2A = A$$

が成立します．零行列に関する等式は明らかでしょう．単位行列については

$$A\vec{e}_1 = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0\vec{b} = \vec{a}$$

$$A\vec{e}_2 = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1\vec{b} = \vec{b}$$

より

$$AI_2 = (A\vec{e}_1\ A\vec{e}_2) = (\vec{a}\ \vec{b}) = A$$

が従います．また

$$I_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^2$ に対して

$$I_2\vec{v} = \vec{v}$$

が従います．そして

$$I_2A = I_2(\vec{a}\ \vec{b}) = (I_2\vec{a}\ I_2\vec{b}) = (\vec{a}\ \vec{b}) = A$$

が分かります．

4.3　行列の正則性

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$AX = XA = I_2$$

を満たす $X \in M_2(\mathbf{K})$ が存在するとき A は**正則**と呼びます．このときこの条件を満たす X は唯一つ存在します．実際 $X, Y \in M_2(\mathbf{K})$ が

$$AX = XA = I_2,\ YX = YA = I_2$$

を満たすとすると $AX = I_2$ の両辺に左から Y を掛けると

$$Y(AX) = YI_2 = Y$$

$$Y(AX) = (YA)X = I_2X = X$$

から $X = Y$ が従います．この X を A の逆行列と呼び A^{-1} と記します．

ここで

$$|A| = ad - bc \neq 0$$

を仮定します．このとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix}$$

から

$$X = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と定めると

$$AX = XA = I_2$$

が従います．よって次の定理を証明しました．

定理 4.3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ が $|A| = ad - bc \neq 0$ を満たすならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となります．

実はこの定理 4.3 の逆が成立します．

定理 4.4. $A \in M_2(\mathbf{K})$ が正則ならば $|A| \neq 0$ が成立します．

Proof. A が正則であるとします．

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$$

が成立するとします．この両辺に A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

$$A^{-1}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = I_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となります．これは $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ であることを意味しますから

$$|\vec{a}\ \vec{b}| \neq 0$$

が従います． □

以上を求めると以下の定理が成立します．

定理 4.5. $A \in M_2(\mathbf{K})$ に対して以下は同値です．
(1) A は正則である．
(2) $|A| \neq 0$
(3) $A\vec{v} = \vec{0} \to \vec{v} = \vec{0}$
(3)' $A = (\vec{a}\ \vec{b})$ とすると $\vec{a} \nparallel \vec{b}$
(4) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ と行ベクトルを定めると $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$
(5) 写像

$$\varphi:\ \mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K}^2$$

は全射である．

この定理において **(5)**⇒**(2)** は演習 VIII で考えてもらいます．

4.4 2次正方行列再論

4.4.1 行ベクトルと転置作用素

$\mathbf{K}$ に値をとる n 次元ベクトル

$$\mathbf{a} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$$

も必要となります．その全体がなす集合を $(\mathbf{K}^n)^*$ と表します．さらに

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$$

が与えられたとき，$\mathbf{a}$ と $\vec{b}$ の積を

$$\mathbf{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in \mathbf{K}$$

を定義できます．列ベクトルを行ベクトルに，行ベクトルを列ベクトルにする**転置作用素**を

$$(\cdot)^t : \mathbf{K}^n \longrightarrow (\mathbf{K}^n)^* \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)$$

$$(\cdot)^t : (\mathbf{K}^n)^* \longrightarrow \mathbf{K}^n \qquad \mapsto (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と定義します．

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ のときに

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = {}^t\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\ \cdots\ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \tag{4.3}$$

が成立することに関連して応用上重要になります．

4.4.2　行列の行ベクトル表示

2 本の 2 次元列ベクトル

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$$

を束ねた行列

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$$

に対して

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}\ a_{12}),\ \mathbf{a}_2 = (a_{21}\ a_{22})$$

をそれぞれ A の第 1 行，第 2 行と呼びます．

行列 A に

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

を掛けると

$$A\vec{v} = v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} v_1 a_{11} + v_2 a_{12} \\ v_1 a_{21} + v_2 a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{v} \\ \mathbf{a}_2\vec{v} \end{pmatrix}$$

と A の行ベクトルと $\vec{v}$ の積によって成分が表現されます．

さらに

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix},\ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$$

を束ねた行列

$$B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$$

を右から A に掛けると

$$AB = (A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{b}_1 & \mathbf{a}_1\vec{b}_2 \\ \mathbf{a}_2\vec{b}_1 & \mathbf{a}_2\vec{b}_2 \end{pmatrix}$$

と成分が A の行ベクトルと B の列ベクトルの積で表されます.

4.5　行列の演算について

4.5.1　ベクトルの演算の性質（復習）

ベクトルの足し算とスカラー倍に関する基本的な定理 4.6 を述べましょう.

定理 4.6. **(1)** $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{4.4}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{4.5}$$

が成立します.

(2) $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{K}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ に対して

$$\lambda\,(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \tag{4.6}$$

$$(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \tag{4.7}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \tag{4.8}$$

が成立します.

4.5.2　行列の和・差とスカラー倍

以下では 2 次正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

と成分表示，列ベクトル表示，行ベクトル表示をして考えます．このとき A と B の和と差を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 + \vec{b}_1 & \vec{a}_2 + \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 - \vec{b}_1 & \vec{a}_2 - \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

と定義します．さらに $\lambda \in \mathbf{K}$ に対して A の λ 倍を

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda \vec{a}_1 \ \lambda \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{a}_1 \\ \lambda \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

と定義します．行列の和・差とスカラー倍については次の定理 4.7 が成立します．

定理 4.7. 2 次正方行列行列 A，B，C に対して，以下が成立します．
(1) $A + B = B + A$
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
(4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
(5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Proof. **(1)**

$$A + B = (\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \vec{a}_2 + \vec{b}_2) = (\vec{b}_1 + \vec{a}_1 \ \vec{b}_2 + \vec{a}_2) = B + A$$

(2) $C = (\vec{c}_1 \ \vec{c}_2)$ と列ベクトル表示をします．

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= \begin{pmatrix} (\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + \vec{c}_1 & (\vec{a}_2 + \vec{b}_2) + \vec{c}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{a}_1 + (\vec{b}_1 + \vec{c}_1) & \vec{a}_2 + (\vec{b}_2 + \vec{c}_2) \end{pmatrix} = A + (B + C) \end{aligned}$$

(3)

$$\lambda\,(\mu A) = \lambda\,(\mu \vec{a}_1 \ \mu \vec{a}_2) = (\lambda(\mu \vec{a}_1) \ \lambda(\mu \vec{a}_2)) = ((\lambda\mu)\vec{a}_1) \ (\lambda\mu)\vec{a}_2)) = (\lambda\mu)A$$

(4)

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)A &= ((\lambda + \mu)\vec{a}_1 \ (\lambda + \mu)\vec{a}_2) = (\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_1 \ \lambda \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_2) \\ &= (\lambda \vec{a}_1 \ \lambda \vec{a}_2) + (\mu \vec{a}_1 \ \mu \vec{a}_2) = \lambda A + \mu A \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \vec{a}_2 + \vec{b}_2) = (\lambda(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \ \lambda(\vec{a}_2 + \vec{b}_2)) = (\lambda \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1 \ \lambda \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2) \\ &= (\lambda \vec{a}_1 \ \lambda \vec{a}_2) + (\lambda \vec{b}_1 \ \lambda \vec{b}_2) = \lambda A + \lambda B \end{aligned}$$

□

4.5.3　行列の積の性質

定理 4.8. A, B, X, Y, Q は 2 次正方行列とします．このとき次が成立します．
(1) $(A+B)X = AX + BX$
(2) $A(X+Y) = AX + AY$
(3) $A(\alpha X) = (\alpha A)\,X = \alpha(AX)$
(4)（結合法則） $(AX)\,Q = A\,(XQ)$

Proof. 証明の準備として $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ に対して

$$(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} \tag{4.14}$$

が成立することを示します．実際

$$\begin{aligned}(A+B)\vec{x} &= \left(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \ \vec{a}_2 + \vec{b}_2\right)\vec{x} \\ &= x_1(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + x_2(\vec{a}_2 + \vec{b}_2) \\ &= x_1\vec{a}_1 + x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_2\vec{b}_2 \\ &= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 = A\vec{x} + B\vec{x}\end{aligned}$$

から分かります．さらに

$$A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) = (\lambda A)\vec{x} \tag{4.15}$$

が成立します．実際，定理 4.8(3) で最初の等号は示しています．2 番目の等式は

$$\begin{aligned}(\lambda A)\vec{x} &= (\lambda\vec{a}_1 \ \lambda\vec{a}_2)\,\vec{x} \\ &= x_1(\lambda\vec{a}_1) + x_2(\lambda\vec{a}_2) \\ &= \lambda x_1\vec{a}_1 + \lambda x_2\vec{a}_2 = \lambda\,(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2) \\ &= \lambda\,(A\vec{x})\end{aligned}$$

と証明できます．
(1) $X = (\vec{x}_1 \ \vec{x}_2)$ と X を列ベクトル表示すると

$$\begin{aligned}(A+B)X &= ((A+B)\vec{x}_1 \quad (A+B)\vec{x}_2) = (A\vec{x}_1 + B\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 + B\vec{x}_2) \\ &= (A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2) + (B\vec{x}_1 \quad B\vec{x}_2) = AX + BX\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}A(X+Y) &= A\,(\vec{x}_1 + \vec{y}_1 \quad \vec{x}_2 + \vec{y}_2) \\ &= (A(\vec{x}_1 + \vec{y}_1) \quad A(\vec{x}_2 + \vec{y}_2)) \\ &= (A\vec{x}_1 + A\vec{y}_1 \quad A\vec{x}_2 + A\vec{y}_2) \\ &= (A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2) + (A\vec{y}_1 \quad A\vec{y}_2) = AX + AY\end{aligned}$$

(3) 示すべき等式は

$$(A(\lambda\vec{x}_1) \quad A(\lambda\vec{x}_2)) = ((\lambda A)\,\vec{x}_1 \quad (\lambda A)\,\vec{x}_2) = \lambda\,(A\vec{x}_1\ A\vec{x}_2)$$

となりますが，この各列が等しいのは (4.15) から従います．
(4) すでに定理 4.2 で証明しています． □

4.6　転置行列

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$$

に対して転置行列を

$${}^tA = \left({}^t\mathbf{a}_1\ {}^t\mathbf{a}_2\right) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$$

として定義します．
　応用上は $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ のときに，すなわち $A \in M_2(\mathbf{R})$ のときに

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w}) \tag{4.16}$$

が成立することが重要となります．この等式の証明は演習 II とします．

4.7　2 変数の 2 次函数

　平面の座標を (x, y) として，(x, y) の 2 次式

$$ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + f = 0 \tag{4.17}$$

を考えます．この 2 次函数を平行移動座標変換で簡単な形のものに変換することを考えます．2 次の項がない場合は考える必要はないですから

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \neq O_2$$

を仮定します．また

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

と定めます．このとき

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix}ax+cy\\cx+by\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\\ &= x(ax+cy)+y(cx+by)=ax^2+2cxy+by^2\end{aligned}$$

となりますから，(4.17) は

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{\beta},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)+f=0$$

と表現できます．

ここでは 1 次の項を平行移動座標変換で消すことができるか考えます．すなわち

$$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換を考えます．簡単のため

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

として

$$\begin{aligned}z &= \left(A\left(\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right),\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{\beta},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+f\\ &\overset{(*)}{=} \left(A\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)+2\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{\beta},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{\beta},\vec{\alpha})+f\\ &= \left(A\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)+\left(2A\vec{\alpha}+\vec{\beta},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{\beta},\vec{\alpha})+f\end{aligned}$$

となります[1]．ここで条件

$$|A|=\begin{vmatrix}a&c\\c&b\end{vmatrix}=ab-c^2\neq 0 \tag{4.18}$$

を仮定します．このとき

$$\vec{\alpha}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{\beta}$$

[1] ここで (*) において ${}^tA=A$ であることを用いて

$$\left(A\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},{}^tA\vec{\alpha}\right)=\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)$$

と変形しています．

と定義することができ，

$$A\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta} = \vec{0}$$

が成立します．従って (ξ, η) 座標では

$$z = \left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f$$

と 1 次の項を消すことができます．定数項は

$$\begin{aligned} & (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f \\ = \ & (-\frac{1}{2}\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f = \frac{1}{2}(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f \end{aligned}$$

と簡単にできます．

演習問題

I 次の行列の積を計算しましょう．

(1) $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(7)** $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(10)** $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

II $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ によって定義します．　$\vec{v},\vec{w}\in\mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v},\vec{w})=(\vec{v},{}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう．

III (1) 座標変換

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

によって

$$z=x^2+xy+y^2-x-2y$$

を ξ,η で表しましょう．

(2) (1) を用いて z の最小値を求めましょう．

IV

$$z=x^2-xy+y^2-2x+3y$$

に対して，平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう．

V 次の行列の逆行列を求めましょう．

(1) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ **(2)** $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ **(3)** $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$ **(4)** $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(5)** $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ **(6)** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ **(7)** $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

VI

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して，平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう．

VII $a > 0,\ ab - c^2 > 0$ のとき

$$ax^2 + 2cxy + by^2 > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

が成立することを示しましょう．

VIII $A = (\vec{a}\ \vec{b})$ は 2 次正方行列であるとします．

$$\varphi:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が全射とします．このとき $|A| = |\vec{a}\ \vec{b}| \neq 0$ が成立することを証明しましょう．