行列式の定義 (1)—3 次の場合に復習と拡張

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08，2019 年 09 月 27 日 at Komaba

3 次行列式（復習）

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

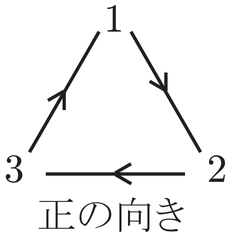
$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| := \sum_{(i\ j\ k) \in S_3} \varepsilon(i\ j\ k) \cdot a_i b_j c_k$$

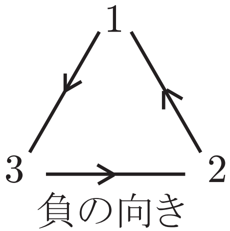
ここで $(i\ j\ k) \in S_3$ は $1, 2, 3$ を並べた順列全体を動きます．また

$$\varepsilon(i\ j\ k) = \begin{cases} 1 & (i\ j\ k)\text{が正の向き} \\ -1 & (i\ j\ k)\text{が負の向き} \end{cases}$$

と順列の符号を定めます.

順列の偶奇





順列とその符号を言い換える (1)

例えば負の向きの順列 $(1\ 3\ 2)$ は全単射

$$\sigma:\ \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$$

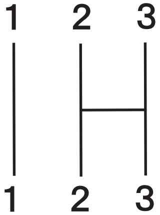
で

$$\sigma(1)=1,\ \sigma(2)=3,\ \sigma(3)=2$$

であるものと考えます（置換と呼びます）．そして

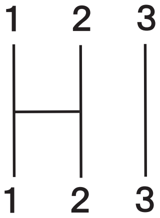
$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

と表します．これは 2 と 3 を交換する互換と呼ばれ $(2\ 3)$ と表します．



順列とその符号を言い換える (2)—負の向きの順列

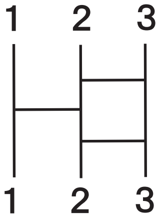
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の場合，2 と 1 を交換する互換で $(1\ 2)$ と表します．



$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の場合，1 と 3 を交換する互換で $(1\ 2)$ と表します．あみだで表すと

$$(1\ 3) = (2\ 3) \circ (1\ 2) \circ (2\ 3)$$

とから右図となります．

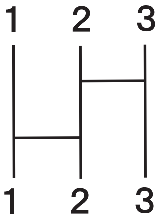


$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ の場合，$\{1,2,3\}$ の上の恒等写像で **1** と表します．

$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ の場合，

$$\sigma = (1\ 2) \circ (2\ 3)$$

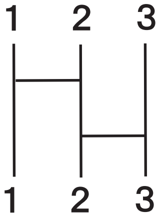
と 2 個の互換の合成で表されます．



$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ の場合,

$$\sigma = (1\ 2) \circ (2\ 3)$$

と 2 個の互換の合成で表されます.



順列とその符号を言い換える (5)—符号について

定理 $\sigma \in S_3$ とします．互換 $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$, $\tau_1, \ldots, \tau_{\ell'}$ に対して

$$\sigma = \sigma_\ell \circ \cdots \circ \sigma_1 = \tau_{\ell'} \circ \cdots \circ \tau_1$$

が成立するならば

$$\ell \equiv \ell' \pmod 2$$

証明は 3 次の場合を含む一般の場合に与えます．

応用—固有多項式 (1)

3 次正方行列 $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_3 - A)$$

を考えます．$B(\lambda) := (b_{ij}(\lambda)) = A - I_3(\lambda)$ とおきます．このとき

$$\Phi_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1}(\lambda) b_{2\sigma(2)2}(\lambda) b_{\sigma(3)3}(\lambda)$$

となります．この右辺の和の項について $\sigma \in S_3$ が $\sigma \neq \mathbf{1}$ ならば

$$\operatorname{ord}\left(b_{\sigma(1)1}(\lambda) b_{\sigma(2)2}(\lambda) b_{\sigma(3)3}(\lambda)\right) \leq 1$$

応用—固有多項式 (2)

$\sigma \neq \mathbf{1}$ のとき

$$j := \sigma(i) \neq i \quad \text{ならば} \quad \sigma(j) \neq \sigma(i) = j$$

であるからである．例えば

$$\sigma(1) = 2 \neq 1 \quad \text{ならば} \quad \sigma(2) \neq 2$$

$j \backslash i$	1	2	3
1			
2	*		
3			

実際

$$\sigma(2) = 1 \text{ または } 3$$

$\sigma = \mathbf{1}$ のとき

$$\begin{aligned} b_{\sigma(1)1}(\lambda)b_{\sigma(2)2}(\lambda)b_{\sigma(3)3}(\lambda) &= b_{11}(\lambda)b_{22}(\lambda)b_{33}(\lambda) \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) \end{aligned}$$

定理 3 次正方行列 $A = (a_{ij}) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + *\lambda - \det(A)$$

定数項については

$$\Phi_A(0) = \left| -\vec{a}_1\ \ -\vec{a}_2\ \ -\vec{a}_3 \right| = -\left| \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3 \right| = -\det(A)$$