2019 年 6 月 28 日確認問題

I 次の $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて

$$L = L(\vec{a},\vec{b}) = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます．$\vec{c}$ の L への直交射影を $X = (\vec{a}\ \vec{b})$ のグラム行列 ${}^tXX$ を用いて求めましょう．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ **(4)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

解答 (1)

$${}^tXX = \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 6\end{pmatrix}, \quad {}^tX\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

と計算されます．$\vec{c}$ の L への直交射影を $\vec{w} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix}6 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$$

が分かり

$$\vec{w} = \frac{4}{7}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{5}{14}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix}$$

(2)

$${}^tXX = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 9\end{pmatrix}, \quad {}^tX\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

と計算されます．$\vec{c}$ の L への直交射影を $\vec{w} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 9\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}9 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-10\\3\end{pmatrix}$$

が分かり

$$\vec{w} = -\frac{10}{17}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{17}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\6\\13\end{pmatrix}$$

(3)

$${}^tXX = \begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}, \quad {}^tX\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

と計算されます．$\vec{c}$ の L への直交射影を $\vec{w} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

が分かり

$$\vec{w} = \frac{2}{11}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{11}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}5\\2\\5\\1\end{pmatrix}$$

(4)

$$ {}^t XX = \begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 6\end{pmatrix}, \quad {}^t X\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

と計算されます．$\vec{c}$ の L への直交射影を $\vec{w} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}6 & -2\\-2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

が分かり

$$\vec{w} = -\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{10}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\\7\end{pmatrix}$$

II 以下の $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が張る部分空間

$$L_3 = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \{x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c};\ x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交基底を求めましょう．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ **(4)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

解答

(1) 5 月 25 日（MSF2018Lec06）配布の追加演習問題 I(1) から

$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交系として

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

で, $\vec{c}$ の L への直交射影が

$$
\begin{aligned}
\vec{w}_2 &= (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q} \\
&= \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となります. L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$
\vec{c}-\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}
$$

を考えると，これを正規化して

$$
\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c}-\vec{w}_2||}(\vec{c}-\vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}
$$

と定めると $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.

(2) 5 月 25 日（MSF2018Lec06）配布の追加演習問題 I(2) から

$$
L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x,y \in \mathbf{R}\}
$$

の正規直交系として

$$
\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}
$$

で, $\vec{c}$ の L への直交射影が

$$
\begin{aligned}
\vec{w}_2 &= (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q} \\
&= \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\6\\13\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となります. L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$
\vec{c}-\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\6\\13\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}4\\-6\\4\end{pmatrix}
$$

を考えると，これを正規化して

$$
\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c}-\vec{w}_2||}(\vec{c}-\vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}
$$

と定めると $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.

(3) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}=\frac{1}{4}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\5\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\5\end{pmatrix}$$

が

$$L=:\{x\vec{a}+y\vec{b};\ x,y\in\mathbf{R}\}$$

の正規直交基底となります．$\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}\vec{w}_2&=(\vec{c},\vec{p})\vec{p}+(\vec{c},\vec{q})\vec{q}\\&=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\5\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\5\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}5\\2\\5\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c}-\vec{w}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}5\\2\\5\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}6\\-2\\-5\\-1\end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r}=\frac{1}{||\vec{c}-\vec{w}_2||}(\vec{c}-\vec{w}_2)=\frac{1}{\sqrt{66}}\begin{pmatrix}6\\-2\\-5\\-1\end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.

(4) 5 月 25 日（MSF2018Lec06）配布の追加演習問題 I(4) から

$$L=:\{x\vec{a}+y\vec{b};\ x,y\in\mathbf{R}\}$$

の正規直交系として

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

を求めました．$\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}
\vec{w}_2 &= (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q} \\
&= \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\\7\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c} - \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\\7\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\\3\end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c} - \vec{w}_2||}(\vec{c} - \vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\\3\end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.

III 以下の正方行列 A が正則ならば逆行列を求めましょう.

(1) $A = \begin{pmatrix}1&1&2&1\\2&3&4&1\\3&3&3&1\\1&2&3&1\end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix}2&-2&4\\2&3&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix}-1&2&-3\\2&1&0\\4&-2&5\end{pmatrix}$ **(4)** $A = \begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}$ **(5)** $A = \begin{pmatrix}1&3&4\\3&-1&6\\-1&5&1\end{pmatrix}$

解答 (1)

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{(1)}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(2)}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{(3)}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(4)}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)
\xrightarrow{(5)}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)
$$

Maxima では以下のように計算します.

```
(%i1) M1:matrix([1,1,2,1],[2,3,4,1],[3,3,3,1],[1,2,3,1]);
                                   [ 1  1  2  1 ]
                                   [            ]
                                   [ 2  3  4  1 ]
(%o1)                              [            ]
                                   [ 3  3  3  1 ]
                                   [            ]
                                   [ 1  2  3  1 ]
(%i2) invert(M1);
                              [  1    1    0   - 2 ]
                              [                    ]
                              [ - 2  - 2   1    3  ]
(%o2)                         [                    ]
                              [  1    2   - 1  - 2 ]
                              [                    ]
                              [  0   - 3   1    3  ]
(%i3)
```

(2)

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{(1)}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(2)}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{(3)}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(4)}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{(5)}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 6 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(7)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 11 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 11 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{2}{13} \end{array}\right) \xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{26} & \frac{11}{26} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{2}{13} \end{array}\right)$$

(5)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{2} & \frac{17}{2} & -11 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

IV 以下のベクトルが線型独立か線型従属か行列の行基本変形を用いて判定しましょう.

(i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

(iv) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

解答 (i) $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ は

$$\begin{cases} x \quad\quad + 3z = 0 \\ \quad\quad y + 2z = 0 \end{cases}$$

と必要十分であることが分かります. 特に $z = -1$ として $x = 3,\ y = 2$ が解となりますから

$$3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$$

が成立することが分かります. よって $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は線型従属であることが分かります.

なお, 上で以下の行基本変形を用いました.

$$\begin{array}{ll} (1) & 2r+ = 1r \times 2,\ 3r+ = 1r \times (-1) \\ (2) & 2r\times = \frac{1}{5} \\ (3) & 1r+ = 2r \times (-2),\ 3r+ = 2r \times 3 \end{array}$$

(ii) $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ は

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

と必要十分であることが分かります．従って $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ から $x=y=z=0$ が従いますから，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型独立であることが分かります．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll}
(1) & 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times 3\\
(2) & 2r\times=\left(-\frac{1}{5}\right)\\
(3) & 1r+=2r\times(-1),\ 3r+=2r\times(-5)\\
(4) & 3r\times=\frac{1}{6}\\
(5) & 1r+=3r\times(-1),\ 2r+=3r\times(-1)
\end{array}$$

(iii) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+w\vec{d}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})$ を行基本変形します．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2\\ -3 & 0 & -1 & 4\\ 7 & 6 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 6 & 8 & 10\\ 0 & -8 & -22 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & -8 & -22 & -19 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{34}{3} & -\frac{17}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+w\vec{d}=\vec{0}$ は

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & & & - & \frac{3}{2}w & = 0\\ & y & & + & \frac{5}{6}w & = 0\\ & & z & + & \frac{1}{2}w & = 0 \end{array}\right.$$

と必要十分であることが分かります．従って $w=1$ として得られる解

$$x=\frac{3}{2},\ y=-\frac{5}{6},\ z=-\frac{1}{2},\ w=1$$

を用いると非自明な線型関係

$$\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$$

が成立することが分かります．よって $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ は線型従属であることが分かりました．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll}
(1) & 2r+=1r\times 3,\ 3r+=1r\times(-7)\\
(2) & 2r\times=\left(\frac{1}{6}\right)\\
(3) & 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times 8\\
(4) & 3r\times=\left(-\frac{3}{34}\right)\\
(5) & 1r+=3r\times\left(-\frac{1}{3}\right),\ 2r+=3r\times\left(-\frac{5}{6}\right)
\end{array}$$

(iv) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3\\ -3 & 0 & -1\\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2}\\ -3 & 0 & -1\\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & \frac{7}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{29}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\frac{29}{2} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ は

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

と必要十分であることが分かります．従って

$$x=0,\ y=1,\ z=0$$

が解となりますから，非自明な線型関係

$$1\cdot\vec{b}=\vec{0}$$

が成立することが分かります．よって $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型従属であることが示されました．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$\begin{array}{ll} (1) & 1r\times=\frac{1}{2} \\ (3) & 2r+=1r\times 3,\ 3r+=1r\times(-7) \\ (4) & 2r\times=\frac{2}{7} \\ (5) & 1r+=2r\times\left(-\frac{3}{2}\right),\ 3r+=2r\times\frac{29}{2} \end{array}$$

V 3 行 2 列の狭義の階段行列を分類の上、解空間の基底を求めましょう．

解答

I <u>rank(A)=2 の場合</u>

(a) $A_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(A_0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc} x & & +az & = & 0 \\ & y & +bz & = & 0 \end{array}\right.$$

であるので

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-az\\-bz\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-a\\-b\\1\end{pmatrix}$$

から $\ker(A)$ の基底として $\begin{pmatrix}-a\\-b\\1\end{pmatrix}$ を選ぶことができる．

(b) $A_0=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(A_0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc} x & +ay & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

であるので

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ay\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-a\\1\\0\end{pmatrix}$$

から $\ker(A)$ の基底として $\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことができる.

(c) $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \quad y \quad & = \quad 0 \\ \qquad z & = \quad 0 \end{cases}$$

であるので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から $\ker(A)$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことができる.

II rank(A)=1 の場合

(d) $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_0) \Leftrightarrow x \quad +ay \quad +bz \quad = \quad 0$$

であるので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ay - bz \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から $\ker(A)$ の基底として $\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことができる.

(e) $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_0) \Leftrightarrow \quad y \quad +az \quad = \quad 0$$

であるので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -az \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

から $\ker(A)$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことができる.

(f) $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_0) \Leftrightarrow \qquad z \;=\; 0$$

であるので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から $\ker(A)$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことができる.

II <u>rank(A)=0 の場合</u>

(g) $A_0 = O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\ker(A) = \mathbf{K}^3$$

で基底として $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ をとることができる.

VI 演習 5.2（教科書 132 ページ） $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ が $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ の線型結合となる必要十分条件を求めましょう.

解答

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ -1 & 8 & c \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 6 & 0 \\ -1 & 8 & c \end{array}\right)$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{19}{2} & c+\frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{19}{2} & c+\frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{(iv)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & c+10 \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 1r\times = \frac{1}{4} \\ (ii) &\quad 2r+ = 1r \times (-3),\ 3r+ = 1r \\ (iii) &\quad 2r\times = \frac{3}{2} \\ (iv) &\quad 3r+ = 2r \times \left(-\frac{19}{2}\right) \end{aligned}$$

を施します. これから

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 = \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} c_1 & & & = & 2 \\ & & c_2 & = & -1 \\ 0\cdot c_1 & + & 0\cdot c_2 & = & c+10 \end{array}\right. \qquad (\#)$$

であることが分かります．従って，$c \neq -10$ のときこの条件を満たす $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ が存在しませんから，$\vec{w}$ は x_1, x_2 の線型結合としては表されません．他方 $c = -10$ のとき

$$\vec{w} = 2\vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

となります．以上で

$$\vec{w} \in L(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad \Leftrightarrow \quad c = -10$$

であることが示されました．

VII 演習 5.9（教科書 137 ページ） 次のベクトルの組み合わせが，線型独立か線型従属か判定しましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \underset{(i)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \underset{(iii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+ = 1r,\ 3r+ = 1r \times (-2) \\ (ii) &\quad 2r\times = \frac{1}{5} \\ (iii) &\quad 1r+ = 2r \times (-2),\ 3r+ = 2r \times 3 \end{aligned}$$

を施します．これから

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

であることが分かります．$x = -3, y = -2, z = 1$ は右側の条件を満たしますから

$$-3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が成立することが分かります．従って与えられたベクトルは線型従属です．

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \underset{(i)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \underset{(ii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(iii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{(iv)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(v)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned}
(i)\quad & 2r+=1r\times(-3),\ 3r+=1r\times 2\\
(ii)\quad & 2r\times=-\frac{1}{5}\\
(iii)\quad & 1r+=2r\times(-1),\ 3r+=2r\times(-5)\\
(iv)\quad & 3r\times=\frac{1}{6}\\
(v)\quad & 1r+=3r\times(-1),\ 2r+=3r\times(-1)
\end{aligned}$$

と施すと

$$x\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x=y=z=0$$

であることが分かります．よって，与えられたベクトルは線型独立です．

VIII 演習問題 3.6（教科書 69 ページ） 以下の A_0 に対して斉次方程式 $A_0\vec{x}=\vec{0}$ を解きましょう．

$$O_3,\ \begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&\alpha\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&\alpha\\0&1&\beta\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解答

(0-1) $\underline{A_0=O_3\text{ のとき}}$　任意の $\vec{x}\in\mathbf{K}^3$ が $A_0\vec{x}=\vec{0}$ を満たしますから，解は $\vec{x}\in\mathbf{K}^3$ すべてとなります．

注意 任意の $\vec{x}\in\mathbf{K}$ が

$$\vec{x}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

で

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{は線型独立である}$$

ので

$$\dim\ker(A_0)=\dim\mathbf{K}^3=3$$

(1-1) $\underline{A_0=\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ のとき}}$

$$A_0\vec{x}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x_1+\alpha x_2+\beta x_3=0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 - \beta x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解となります.

<u>注意</u>

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \dim \ker(A_0) = 2$$

であることが分かります.

(1-2) <u>$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき</u>

$$A_0 \vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 + \alpha x_3 = 0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\alpha x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解となります.

<u>注意</u>

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \dim \ker(A_0) = 2$$

であることが分かります.

(1-3) <u>$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき</u>

$$A_0 \vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が解となります.

<u>注意</u>

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \dim \ker(A_0) = 2$$

であることが分かります.

(2-1) <u>$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき</u>

$$A_0 \vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + \alpha x_3 = 0,\ x_2 + \beta x_3 = 0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha x_3 \\ -\beta x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解となります.

<u>注意</u>

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \text{から} \quad \dim\ker(A_0) = 1$$

であることが分かります.

(2-2) <u>$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき</u>

$$A_0\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + \alpha x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が解となります.

<u>注意</u>

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \text{から} \quad \dim\ker(A_0) = 1$$

であることが分かります.

(2-3) <u>$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき</u>

$$A_0\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が解となります.

<u>注意</u>

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \text{から} \quad \dim\ker(A_0) = 1$$

であることが分かります.

IX 演習問題 3.7（教科書 72 ページ）次の拡大行列が表す連立 1 次方程式に解が存在するかについて調べ，解が存在するならば求めましょう．

(1) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$ **(2)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 11 \\ 6 & 20 & -6 & 3 \\ 0 & 6 & -18 & 1 \end{array}\right)$

解答 (1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & -5 \end{array}\right)$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -1 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & -5 \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と拡大行列は行基本変形によって狭義の階段行列になります．ここで

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+=1r\times(-3),\ 3r+=1r\times(-4) \\ (ii) &\quad 2r\times=\frac{1}{5} \\ (iii) &\quad 1r+=2r,\ 3r+=2r\times(-5) \end{aligned}$$

という変形を用いました．この結果与えられた方程式は

$$\begin{cases} x \qquad + \frac{4}{5}z + \frac{3}{5}w = 1 \\ \qquad y - \frac{6}{5}z - \frac{2}{5}w = -1 \end{cases}$$

と必要十分ですから解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\alpha - \frac{3}{5}\beta + 1 \\ \frac{6}{5}\alpha + \frac{2}{5}\beta - 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となります.

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 11 \\ 6 & 20 & -6 & 3 \\ 0 & 6 & -18 & 1 \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & -6 & -30 \\ 0 & 6 & -18 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & -6 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 91 \end{array}\right)$$

と拡大行列は行基本変形されます．ここで行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+=1r\times(-3) \\ (ii) &\quad 3r+=2r\times(-3) \end{aligned}$$

を用いました．与えられた方程式を (x, y, z) が満たすと

$$0x + 0y + 0z = 91$$

が成立しますが，これはあり得ません．従って与えられた方程式に解が存在しないことが分かります.

X 演習問題 3.8（教科書 72 ページ）連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ x-3y+2z &= 4 \\ 3x-2y+z &= c \end{cases}$$

に解が存在する条件を求めましょう．

解答

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & c \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & c \end{array}\right)$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & -7 \\ 0 & 7 & -5 & c-12 \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & c-5 \end{array}\right)$$

と拡大行列は行基本変形されます．ここで行基本変形

$$\begin{aligned} &(i) 1r \leftrightarrow 2r \\ &(ii) 2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times (-3) \\ &(iii) 3r+ = 2r \times (-7) \end{aligned}$$

を用いました．$c \neq 5$ とすると，与えられた方程式を (x, y, z) が満たすならば

$$0x + 0y + 0z = c - 5$$

が成立しますが，これはあり得ません．従って解が存在するならば

$$c = 5$$

が必要であることが分かります．逆に $c = 5$ のとき与えられた方程式の拡大行列はさらに

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{(iv)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{(v)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (iv) &\quad 2r \times \frac{1}{7} \\ (v) &\quad 1r+ = 2r \times 3 \end{aligned}$$

によって変形されます．従って与えられた方程式は

$$\begin{cases} x \qquad - \frac{1}{7}z &= 1 \\ \qquad y - \frac{5}{7}z &= -1 \end{cases}$$

と必要十分で解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}\alpha \\ \frac{5}{7}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

が存在することが分かります．以上で解が存在する必要十分条件が $c = 5$ であることが示されました．

XI 演習問題 3.9（教科書 72 ページ）$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ とします．$A\vec{x} = \vec{b}$ に解が存在する条件を求めましょう．

解答

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+ = 1r \times (-4) \\ (ii) &\quad 2r\times = (-1) \\ (iii) &\quad 1r+ = 2r \times (-1),\ 3r+ = 2r \times (-2) \end{aligned}$$

を用いて変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b_1 + b_2 \\ 4b_1 - b_2 \\ -8b_1 + 2b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．従って解が存在するならば

$$0x + 0y + 0z = -8b_1 + 2b_2 + b_3$$

が成立しますが，もし $-8b_1 + 2b_2 + b_3 \neq 0$ ならば解が存在することが分かります．逆に

$$-8b_1 + 2b_2 + b_3 = 0$$

ならば与えられた方程式は

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & & & - & z & = & -3b_1 & + & b_2 \\ & & y & + & 2z & = & 4b_1 & - & b_2 \end{array} \right.$$

と必要十分で解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 3b_1 + b_2 \\ -2\alpha + 4b_1 - b_2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

を持ちます．

XII 演習 4.10 (教科書 98 ページ)　次の連立 1 次方程式をクラメールの公式を用いて解きましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて

$$x = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{49}{10}$$

$$y = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$z = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて,

$$x = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$z = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

XIII クラメールの公式を用いて

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めましょう.

解答

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 = 2 \neq 0$$

から A が正則であることが分かります．従って

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

となります.

XIV

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & a & 3-2a\end{pmatrix},\vec{\beta}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ 1\end{pmatrix}$$

とします。

(1) $\det(A)$ を計算しましょう.

(2) $\det(A)=0$ と $\det(A)\neq 0$ で場合を分けて，連立 1 次方程式

$$A\vec{x}=\vec{\beta}$$

に解が存在する条件を求めましょう.

解答 (1)

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & a & 3-2a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & a-1 & 2-2a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ a-1 & 2-2a\end{vmatrix}=2-2a=2(1-a)$$

となります.

(2) $a\neq 1$ ならば A は正則ですから，$A\vec{x}=\vec{\beta}$ には一意的な解 $\vec{x}=A^{-1}\vec{\beta}$ が存在します.

さらに $\vec{a}=1$ ならば

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & b\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & b-1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2-b\\ 0 & 1 & 0 & b-1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

から解

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-b-t\\ b-1\\ t\end{pmatrix}$$

が存在ます．以上で a,b に依らず常に解が存在することが分かります.