演習問題 2019 年 6 月 28 日

I

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\4\\6\\9\end{pmatrix},$$

とします．さらに

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}3\\8\\7\\13\end{pmatrix},\quad \vec{\beta}=\begin{pmatrix}2\\7\\9\\14\end{pmatrix},\quad \vec{\gamma}=\begin{pmatrix}3\\9\\10\\17\end{pmatrix},$$

とします．

(1) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が線型独立で

$$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in L=L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

であることを示しましょう．

(2) $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ が線型独立で，$L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ の基底となることを示しましょう．

(3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が L で定める座標と $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ が L で定める座標を相互に表しましょう．

解答 (1)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\mid\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&3&2&3\\2&3&4&8&7&9\\1&3&6&7&9&10\\3&5&9&13&14&17\end{array}\right)\xrightarrow{(i)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&3&2&3\\0&1&2&2&3&3\\0&2&5&4&7&7\\0&2&6&4&8&8\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(ii)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&-1&0\\0&1&2&2&3&3\\0&0&1&0&1&1\\0&0&2&0&2&2\end{array}\right)\xrightarrow{(iii)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&2&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

と行基本変形をすると

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x=y=z=0$$

であることが分かりますから $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線形独立であることが分かります．また

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}-\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x=1,\ y=2,\ z=0$$

から

$$\vec{\alpha}=\vec{a}+2\vec{b}$$

が分かります．同様に

$$\vec{\beta}=\vec{b}+\vec{c},\quad \vec{\gamma}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

も分かります．

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(a)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(b)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(c)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(d)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

から $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ は正則で $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ であることが分かります．他方

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P \tag{\#}$$

が成立しますから

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

とすると

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が従います．このとき $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は線型独立ですから

$$P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となります．さらに P が正則ですから

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

であることが分かります．以上で $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ が線型独立であることが示されました．

(3)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすると (#) から

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となりますが、$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が線型独立ですから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

が分かります.

補足　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ が線型独立であるとします．このとき

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

に対して

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix}$$

を満たす

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix}$$

を定めます．このとき以下の定理が成立します.

定理　以下の (1), (2), (3) は必要十分です.

(1) X は正則です.

(2) $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ は線型独立です.

(3) $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$

証明　(1)⇒(2)

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

とします．すると

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が従います．ここで $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立であることを用いると

$$X \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が分かります．さらに X が正則ですから $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$ が分かります.

(2)⇒(3)

$$L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \subset L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

は明らかです．もし

$$L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \subsetneq L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

であるとすると，ある $\vec{\delta} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ が

$$\vec{\delta} \notin L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$$

を満たします．このとき

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\text{が線型独立である}$$

ことになりますから，矛盾が生じます．よって

$$L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

であることになります．

(3)⇒(1)

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma} \end{pmatrix} Y$$

を満たす $Y \in M_3(\mathbf{K})$ が存在します．このとき

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} XY$$

となりますが，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は線型独立ですから，任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} XY\vec{v}$$

が成立することから

$$\vec{v} = XY\vec{v}$$

が従います．これから

$$XY = I_3$$

が従います．これは X が正則であることを意味します．

II (問題修正：2022/02/26, $\vec{\gamma}$)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

とします．さらに

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

とします．

(1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立で

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in L = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

であることを示しましょう．

(2) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ が線型独立で，$L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ の基底となることを示しましょう．

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が L で定める座標と $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ が L で定める座標を相互に表しましょう．

解答　(1)

$$
(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\mid\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&2&1&1\\2&3&7&5&5&4\\-1&2&3&1&4&1\\3&2&3&5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(i)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&2&1&1\\0&1&3&1&3&2\\0&3&5&3&5&2\\0&-1&-3&-1&-3&-2\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(ii)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&-2&-1\\0&1&3&1&3&2\\0&0&-4&0&-4&-4\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(iii)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&-2&-1\\0&1&3&1&3&2\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(iv)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)
$$

と行基本変形をすると

$$
x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x=y=z=0
$$

であることが分かりますから $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型独立であることが分かります．また

$$
x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}-\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x=1,\ y=1,\ z=0
$$

から

$$
\vec{\alpha}=\vec{a}+\vec{b}
$$

が分かります．同様に

$$
\vec{\beta}=-\vec{a}+\vec{c},\quad\vec{\gamma}=-\vec{b}+\vec{c}
$$

も分かります.

(2)

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\1&0&-1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(a)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(b)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&1&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{(c)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&-1&1\end{array}\right)
$$

から $P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ は正則で $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ であることが分かります．他方

$$
(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P \tag{\#}
$$

が成立しますから

$$
(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\vec{0}
$$

とすると

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

が従います．このとき $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は線型独立ですから

$$P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

となります．さらに P が正則ですから

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

であることが分かります．以上で $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ が線型独立であることが示されました．

(3)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

とすると (#) から

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

となりますが、$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が線型独立ですから

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$$

さらに

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

が分かります．

III 掃き出し法を用いて

$$\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

の逆行列を求めましょう。

解答

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & a & b & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & b-ac & 1 & -a & 0\\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

から

$$\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -a & ac-b\\ 0 & 1 & -c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

が分かります．上で

$$\begin{aligned}&(1)\quad 1r+ = 2r\times(-a)\\ &(2)\quad 1r+ = 3r\times(ac-b),\quad 2r+ = 3r\times(-c)\end{aligned}$$

を用いています.

IV 連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -5 & 5\\ 1 & 3 & -4 & 7\\ 4 & -9 & -7 & 1\end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix}c-2\\ c\\ 3c\end{pmatrix}$$

に解が存在する c を求め、そのときに解を求めましょう。

解答

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & -5 & 5 & c-2\\ 1 & 3 & -4 & 7 & c\\ 4 & -9 & -7 & 1 & 3c\end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -4 & 7 & c\\ 2 & -1 & -5 & 5 & c-2\\ 4 & -9 & -7 & 1 & 3c\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -4 & 7 & c\\ 0 & -7 & 3 & -9 & -c-2\\ 0 & -21 & 9 & -27 & -c\end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -4 & 7 & c\\ 0 & -7 & 3 & -9 & -c-2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c+6\end{array}\right) = (*)$$

ここで最後の拡大行列の第 3 行が表す方程式は

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 2c+6$$

ですが，$2c+6\neq 0$ ならば，これを満たす $\vec{x}$ は存在しません．従って解が存在するためには $c=-3$ が必要です．逆にこのとき

$$(*) = \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -4 & 7 & -3\\ 0 & -7 & 3 & -9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -4 & 7 & -3\\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{1}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -\frac{19}{7} & \frac{22}{7} & -\frac{18}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{1}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

となりますから，与えられた方程式は

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}x_1 & & -\frac{19}{7}x_3 & +\frac{22}{7}x_4 & = & -\frac{18}{7}\\ & x_2 & -\frac{3}{7}x_3 & +\frac{9}{7}x_4 & = & -\frac{1}{7}\end{array}\right.$$

と必要十分です．ここで $x_3=s,\ x_4=t$ とすると

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{19}{7}s - \frac{22}{7}t - \frac{18}{7}\\ \frac{3}{7}s - \frac{9}{7}t - \frac{1}{7}\\ s\\ t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\ \frac{3}{7}\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-\frac{22}{7}\\ -\frac{9}{7}\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{18}{7}\\ -\frac{1}{7}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

が解となります.