演習問題 2019 年 7 月 12 日

I 2 次の実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して以下の条件 (i),(ii),(iii) が必要十分であることを証明しましょう．

(i) A が定める 2 次形式が非負定値である．すなわち

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \geq 0 \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2)$$

(ii) A の固有値 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ が $\alpha, \beta \geq 0$ を満たす.

(iii) $a, b \geq 0,\ ab - c^2 \geq 0$

解答　A を回転行列 $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$ で

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化します．このとき

$$A\vec{r}_1 = \alpha\vec{r}_1, \quad A\vec{r}_2 = \beta\vec{r}_2$$

が成立します．さらに回転座標変換 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって

$$(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

となります.

<u>(i)⇒(ii)</u>

$$0 \leq (A\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\alpha\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha||\vec{r}_1||^2 = \alpha$$

から $\alpha \geq 0$ が従います．同様に $\beta \geq 0$ も導けます.

<u>(ii)⇒(i)</u> $\alpha, \beta \geq 0$ から

$$(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \geq 0$$

が従います.

<u>(ii)⇒(iii)</u>

一般に $p, q \in \mathbf{R}$ に対して

$$p, q \geq 0 \ \Leftrightarrow\ p + q \geq 0,\ pq \geq 0$$

が成立します.

$\Phi_A(\lambda) = 0$ の解と係数の関係を用いて

$$a + b = \alpha + \beta \geq 0,\ ab - c^2 = \alpha\beta \geq 0 \text{ 従って } ab = \alpha\beta + c^2 \geq 0$$

から $a, b \geq 0$ が成立します．以上で (ii)⇒(iii) を証明しました.

(iii)⇒(ii) 対称行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ の固有値 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ですから

$$\alpha, \beta \geq 0 \ \Leftrightarrow \alpha+\beta \geq 0,\ \alpha\beta \geq 0$$

が成立します．(iii) の仮定の下で

$$\alpha+\beta = a+b \geq 0, \alpha\beta = ab-c^2 \geq 0$$

が成立しますから $\alpha, \beta \geq 0$ となります.

II $m \times n$ 行列 A があるとします。P が m 次の正方行列、Q が n 次の正則行列であるとき

$$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim \mathrm{Im}(PA) \tag{14}$$

$$\dim \ker(A) = \dim \ker(AQ) \tag{15}$$

が成立することを示しましょう。

解答　(14) について
$\mathrm{Im}(A)$ の基底を $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ としましょう．このとき $\alpha_j = A\vec{x}_j$ を満たす $\vec{x}_j \in \mathbf{K}^n$ が存在しますから $P\vec{\alpha}_j = PA\vec{x}_j \in \mathrm{Im}(PA)$ となることが分かります．以下では

$$P\vec{\alpha}_1, \ldots, P\vec{\alpha}_\ell \text{ は } \mathrm{Im}(PA) \text{ の基底となる}$$

ことを示します．$c_1P\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell P\vec{\alpha}_\ell = \vec{0}$ が成立すると

$$c_1P\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell P\vec{\alpha}_\ell = P\left(c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell\vec{\alpha}_\ell\right) = \vec{0}$$

から $c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell\vec{\alpha}_\ell = \vec{0}$ が導けますから $c_1 = \cdots = c_\ell = 0$ が従います．よって

$$P\vec{\alpha}_1, \ldots, P\vec{\alpha}_\ell \text{ は線型独立である}$$

ことが分かりました．さらに任意の $\vec{v} \in \mathrm{Im}(PA)$ をとるとある $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して $\vec{v} = PA\vec{x}$ が成立します．このとき $A\vec{x} \in \mathrm{Im}(A)$ が成立しますから

$$A\vec{x} = c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell\vec{\alpha}_\ell$$

と表現されます．この両辺に P を掛けると

$$\vec{v} = PA\vec{x} = P\left(c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell\vec{\alpha}_\ell\right) = c_1P\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell P\vec{\alpha}_\ell$$

と $\vec{v}$ が $P\vec{\alpha}_1, \ldots, P\vec{\alpha}_\ell$ の線型和で表現できます．以上で

$$P\vec{\alpha}_1, \ldots, P\vec{\alpha}_\ell \text{ は } \mathrm{Im}(PA) \text{ を生成する}$$

ことが分かりました.
(15) について$\ker(A)$ の基底を $\alpha_1, \ldots, \beta_t$ としましょう．このとき $AQ \cdot Q^{-1}\beta_i = A\vec{\beta}_i = \vec{0}$ が成立しますから, $A^{-1}\vec{\beta}_j \in \ker(PA)$ となることが分かります．以下では

$$Q^{-1}\vec{\beta}_1, \ldots, P\vec{\beta}_t \text{ は } \ker(PA) \text{ の基底となる}$$

ことを示します．$c_1Q^{-1}\vec{\beta}_1+\cdots+c_\ell Q^{-1}\vec{\beta}_\ell=\vec{0}$ が成立すると

$$c_1Q^{-1}\vec{\beta}_1+\cdots+c_\ell Q^{-1}\vec{\beta}_t=Q^{-1}\left(c_1\vec{\beta}_1+\cdots+c_t\vec{\beta}_t\right)=\vec{0}$$

から $c_1\vec{\beta}_1+\cdots+c_t\vec{\beta}_t=\vec{0}$ 導けますから $c_1=\cdots=c_t=0$ が従います．よって

$$Q^{-1}\vec{\beta}_1,\ldots,P\vec{\beta}_t\ \text{は線型独立である}$$

ことが分かります．次に $\vec{w}\in\ker(AQ)$ を任意にとります．このとき $Q\vec{w}\in\ker(A)$ ですから

$$Q\vec{w}=c_1\vec{\beta}_1+\cdots+c_t\vec{\beta}_t$$

と表されます．この両辺に Q^{-1} を掛けると

$$\vec{w}=Q^{-1}(c_1\vec{\beta}_1+\cdots+c_t\vec{\beta}_t)=c_1Q^{-1}\vec{\beta}_1+\cdots+c_tQ^{-1}\vec{\beta}_t$$

となりますから

$$Q^{-1}\vec{\beta}_1,\ldots,P\vec{\beta}_t\ \text{は}\ \ker(QA)\ \text{を生成する}$$

ことが示されました.

III $V\subset\mathbf{R}^n$ は部分空間とします。

$$V^\perp=\{\vec{w}\in\mathbf{R}^n;(\vec{v},\vec{w})=0\ (\vec{v}\in V)\}$$

は $\mathbf{R}^n$ の部分空間です（V の直交補空間と呼びます）.

(1) V_1，V_2 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします。

$$V_1\subset V_2$$

が成立するならば $V_1^\perp\supset V_2^\perp$ が成立することを示しましょう。

(2) V_1，V_2 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします。

$$(V_1+V_2)^\perp\subset V_j^\perp\ (j=1,2)$$

を示しましょう。

(3) V_1，V_2 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします。

$$(V_1+V_2)^\perp=V_1^\perp\cap V_2^\perp$$

であることを示しましょう。

解答 (1) $\vec{w}\in V_2^\perp$ とします．$\vec{v}_1\in V_1$ であると $\vec{v}_1\in V_2$ となりますから

$$(\vec{w},\vec{v}_1)=0$$

が従います．よって $\vec{w}\in V_2^\perp$ であることが分かります.

(2) $V_1,V_2\subset V_1+V_2$ が成立しますから (3) を用いると

$$(V_1+V_2)^\perp\subset V_1^\perp,\ (V_1+V_2)^\perp\subset V_2^\perp$$

が分かります.

(3) (2) から

$$(V_1+V_2)^{\perp} \subset V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$$

が分かります．逆に $\vec{w} \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$ とします．$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ が $\vec{v}_1 \in V_1,\ \vec{v}_2 \in V_2$ に対して成立しているとすると $\vec{w} \in V_1^{\perp}$ かつ $\vec{w} \in V_2^{\perp}$ が成立しますから

$$(\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{v}_1) + (\vec{w}, \vec{v}_2) = 0$$

となります．これは $V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp} \subset (V_1+V_2)^{\perp}$ を意味します．以上で $(V_1+V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$ を示しました．
注意 さらに (3) の両辺の直交補空間を考えると

$$(V_1 \cap V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} + V_2^{\perp}$$

が導けます．

IV A を $m \times n$ 行列として A が定める線型写像を

$$f_A:\ \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m \quad \vec{v} \mapsto A\vec{v}$$

と表します．
(1) V は $\mathbf{K}^n$ の部分空間とします。このとき

$$AV := f_A(V) = \{A\vec{v} \in \mathbf{K}^m; \vec{v} \in V\}$$

が $\mathbf{K}^m$ の部分空間であることを示しましょう。
(2) W は $\mathbf{K}^m$ の部分空間とします。このとき

$$f_A^{-1}(W) = \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n; A\vec{v} \in W\}$$

が $\mathbf{K}^n$ の部分空間であることを示しましょう。

解答 (1) $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in AV$ とします．このとき

$$A\vec{v}_1 = \vec{w}_1, \quad A\vec{v}_2 = \vec{w}_2$$

を満たす $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ が存在します．このとき

$$\lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 = \lambda_1 A\vec{v}_1 + \lambda_2 A\vec{v}_2 = A\left(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\right)$$

から $\lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 \in AV$ が分かります．よって AV は部分空間です．
(2) $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in f_A^{-1}(W)$ とします．このとき $A\vec{v}_1, A\vec{a}_2 \in W$ となります．W は部分空間ですから

$$A\left(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\right) = \lambda_1\vec{A}\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{A}\vec{v}_2 \in W$$

から $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 \in f^{-1_A(W)}$ であることが分かります．これは $f_A^{-1}(W)$ が部分空間であることを意味します．

V $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||A||^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2$$

と定めます。

(1) $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$||A\vec{x}|| \leq ||A|| \cdot ||\vec{x}||$$

を示しましょう。

(2) $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

を示しましょう。

解答 (1) $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ と列ベクトル表示, 行ベクトル表示を考えると

$$||A||^2 = ||\vec{a}_1||^2 + ||\vec{a}_2||^2 = ||\mathbf{a}_1||^2 + ||\mathbf{a}_2||^2$$

が成立することに注意しましょう．他方

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{x} \\ \mathbf{a}_2\vec{x} \end{pmatrix}$$

が成立します．ここでコーシー・シュヴァルツの不等式を用いると

$$|\mathbf{a}_j\vec{x}|^2 \leq ||\mathbf{a}_j||^2 \cdot ||\vec{x}||^2$$

が成立します．これを用いると

$$\begin{aligned} ||A\vec{x}||^2 &= |\mathbf{a}_1\vec{x}|^2 + |\mathbf{a}_2\vec{x}|^2 \\ &\leq ||\mathbf{a}_1||^2||\vec{x}||^2 + ||\mathbf{a}_2||^2||\vec{x}||^2 \\ &= (||\mathbf{a}_1||^2 + ||\mathbf{a}_2||^2)||\vec{x}||^2 \\ &= ||A||^2 \cdot ||\vec{x}||^2 \end{aligned}$$

から

$$||A\vec{x}||^2 \leq ||A|| \cdot ||\vec{x}||$$

が従います.

(2) $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2)$ と列ベクトル表示をすると

$$\begin{aligned} ||AB||^2 &= ||A\vec{b}_1||^2 + ||A\vec{b}_2||^2 \\ &\leq ||A||^2 \cdot ||\vec{b}_1||^2 + ||A||^2 \cdot ||\vec{b}_2||^2 \\ &= ||A||^2 \cdot (||\vec{b}_1||^2 + ||\vec{b}_2||^2) = ||A||^2 \cdot ||B||^2 \end{aligned}$$

から

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

が従います.

VI (V の続き) **(1)** 行列の列 $A_\ell \in M_2(\mathbf{R})$ $(\ell = 0, 1, 2, \dots)$ が与えられているとします．$A \in M_2(\mathbf{R})$ が列 $\{A_\ell\}$ の極限であるとは

$$||A_\ell - A|| \to 0 \quad (\ell \to +\infty)$$

が成立するときです．このとき

$$A_\ell = \begin{pmatrix} a_\ell & b_\ell \\ c_\ell & d_\ell \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ならば

$$A_\ell \to A \ (\ell \to +\infty) \Leftrightarrow \ a_\ell \to a, \ b_\ell \to b, \ c_\ell \to c, \ d_\ell \to d$$

が成立することを示しましょう．

(2) $B_\ell \in M_2(\mathbf{R})$ $(\ell = 0, 1, 2, \dots)$ が

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} ||B_\ell|| < +\infty$$

が成立するならば

$$S_\ell = B_0 + B_1 + \cdots + B_\ell$$

が収束することを示しましょう．

(3) $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して無限和

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell$$

が収束することを示しましょう．無限和を e^{tA} と記します．

(4) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ に対して e^{tA} を求めましょう．

解答 (1)

$$\|A_\ell - A\|^2 = (a_\ell - a)^2 + (b_\ell - b)^2 + (c_\ell - c)^2 + (d_\ell - d)^2$$

が成立しますから $a_\ell \to a, \ b_\ell \to b, \ c_\ell \to c, \ d_\ell \to d$ ならば $\|A_\ell - A\| \to 0$ $(\ell \to +\infty)$ が従います．よってこのとき $A_\ell \to A$ $(\ell \to +\infty)$ となります．逆に $A_\ell \to A$ $(\ell \to +\infty)$ とすると

$$|a_\ell - a| \le \|A_\ell - A\| \to 0$$

から $a_\ell \to 0$ が従います．$b_\ell \to b, \ c_\ell \to c, \ d_\ell \to d$ も同様に従います．

(2) $B_\ell = \left(\begin{smallmatrix} x_\ell & y_\ell \\ z_\ell & w_\ell \end{smallmatrix}\right)$ とします．このとき $|x_\ell| \le \|B_\ell\|$ から

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} |x_\ell| \le \sum_{\ell=0}^{+\infty} \|B_\ell\| < +\infty$$

から $\sum_{\ell=0}^{+\infty} x_\ell$ が絶対収束します．同様に $\sum_{\ell=0}^{+\infty} y_\ell$, $\sum_{\ell=0}^{+\infty} z_\ell$, $\sum_{\ell=0}^{+\infty} w_\ell$ が絶対収束しますから，$\sum_{\ell=0}^{+\infty} B_\ell$ が収束することが分かります．

(3)

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{+\infty} \left\| \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell \right\| &\le \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} |t|^\ell \|A\|^\ell \\
&= \|I_2\| + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} |t|^\ell \|A\|^\ell \\
&= \sqrt{2} + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} |t|^\ell \|A\|^\ell = \sqrt{2} + e^{|t| \cdot \|A\|} < +\infty
\end{aligned}$$

であることから $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell$ が収束することか分かります．

(4) ここでは次の定理を用います．証明は実数ある

いは複素数の絶対収束する 2 重級数に関する定理と同様に証明できます.

> 2 次正方行列の 2 重列 B_{ij} $(i, j \geq 0)$ が以下の条件のいずれかを満たすとします.
>
> - $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \|B_{ij}\|\right) < +\infty$
> - $\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \|B_{ij}\|\right) < +\infty$
> - $\sum_{0 \leq i,j \leq \ell} \|B_{ij}\|$ が上に有界である.
> - $\sum_{\ell=0}^{n} \sum_{i+j=\ell} \|B_{ij}\|$ が上に有界である.
>
> このとき
>
> $$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} B_{ij}\right) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} B_{ij}\right) \\ &= \lim n \to +\infty \sum_{0 \leq i,j \leq n} B_{ij} \\ &\sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{i+j=\ell} B_{ij} \end{aligned}$$

ここで $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $A = aI_2 + bJ$ となりますから

$$A^\ell = \sum_{i+j=\ell} {}_\ell C_j a^i b^j J^j$$

となります. これから

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell &= \sum_{i,j \geq 0} \frac{1}{i!} (at)^i \cdot \frac{1}{j!} (bt)^j J^j \\ &= e^{at} e^{btJ} \end{aligned}$$

となります. さらに

$$\begin{aligned} e^{btJ} &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + bt \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + b^2 t^2 \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) + b^3 t^3 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \ldots \\ &= \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となりますから

$$e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

であることが分かります.