I まずAを直交行列で対角化します.

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

からAの固有値は$\lambda = -1, 2, 5$です. 次に固有ベクトルを求めます.

$\lambda = -1$のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x + z = 0, \ y = 0$$

から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-1)$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せます. ここで

$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とします.

$\lambda = 2$のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z$$

から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(2)$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せます. ここで

$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とします.

$\lambda = 5$のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x = z, \ y = -2z$$

から $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V(5)$ は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ と書けます。ここで
$\vec{p_3}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ とします。

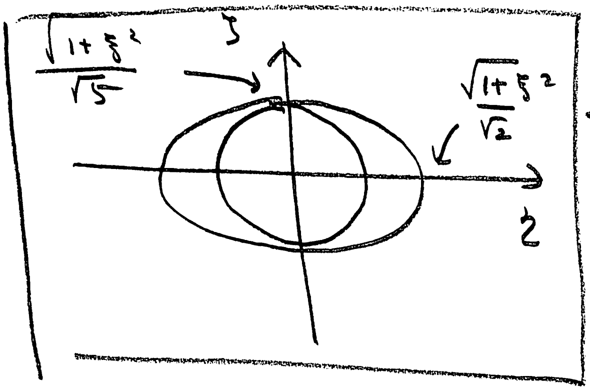
$P=(\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})$ は直交行列で ${}^tPAP=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$ と
対角化され 2次曲面は $\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}={}^tP\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ で

$$1=\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=-\xi^2+2\eta^2+5\zeta^2$$

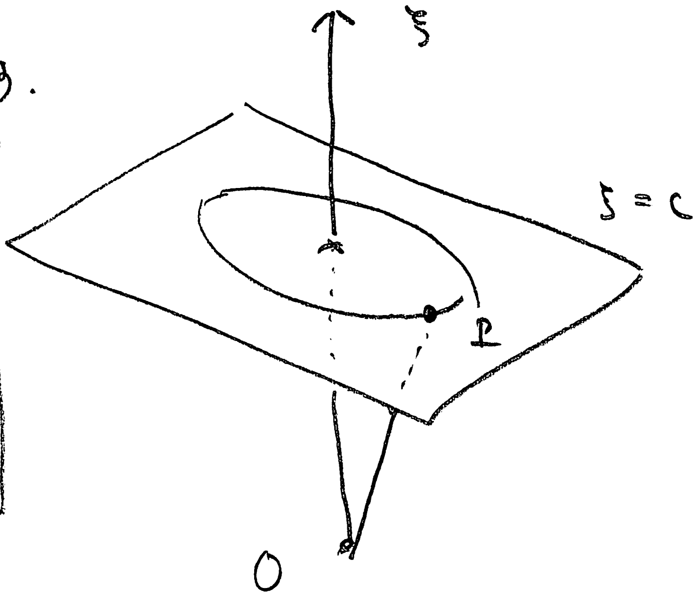
となります。2次曲面を
$\xi=c$ （定数）で断面をとると

$$2\eta^2+5\zeta^2=1+c^2$$

と楕円になることが分かります。



$\xi=c$



断面上の楕円の上を点P(c,η,ζ)を動かしますと $\eta=0,\ \zeta=\pm\frac{\sqrt{1+c^2}}{\sqrt{5}}$ で
$\eta^2+\zeta^2$ が最小値 $\frac{1+c^2}{5}$ を取りますから

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=c^2+\frac{1+c^2}{5}=\frac{1+6c^2}{5}$$

$$\geq\frac{1}{5}$$

$(=) \iff c=0$

となりますから $\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ のとき すなわち $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{p_3}$

のとき最小値 $\frac{1}{5}$ をとることが分かります。

II $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&5&1\\2&1&5\end{pmatrix}$ を直交行列で対角化します.

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-2\\-2&\lambda-5&-1\\-2&-1&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-2\\-2&\lambda-5&-1\\0&4-\lambda&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-2\\-2&\lambda-5&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-4&-4&0\\-2&\lambda-6&0\\0&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\left((\lambda-4)(\lambda-6)-8\right)=(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-8)$$

から A の固有値は $\lambda=2,4,8$ であることが分かります. 次に固有ベクトルを求めます.

$\underline{\lambda=2\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-2&-4&0\\-2&-4&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\iff\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$\iff x+2z=0,\ y-z=0$$

から

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V(2)$ は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2z\\z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ と表せます.

$\vec{p}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ とします.

$\underline{\lambda=4\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}0&-2&-2\\-2&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\iff\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$\iff x=0,\ y=-z$$

から

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V(4)$ は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ と表せます. ここで

$\vec{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ とします

$\underline{\lambda=8\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}4&-4&0\\-2&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\iff\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$\iff x=y=z$$

から

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V(8)$ は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ と表せます．ここで
$\vec{p}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とします．

$P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は直交行列で ${}^tPAP=\begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&8\end{pmatrix}$
と対角化できます．A が定める2次形式は $\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}={}^tP\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ で

$$1=\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=2\xi^2+4\eta^2+8\zeta^2=1$$

と表せます．このとき

$$x^2+y^2+z^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{2}-2\eta^2-4\zeta^2\right)+\xi^2+\zeta^2$$

$$=\frac{1}{2}-\eta^2-3\zeta^2\leq\frac{1}{2}$$

において等号成立が $\eta=\zeta=0$ と同値であるので

$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}$ のときすなわち $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_1$

のとき $x^2+y^2+z^2$ は最大値 $\frac{1}{2}$ をとります．他方

$$x^2+y^2+z^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\xi^2+\eta^2+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\xi^2-\frac{1}{2}\eta^2\right)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\eta^2\geq\frac{1}{8}$$

において等号成立が $\xi=\eta=0$ と同値であるので

$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ のとき，すなわち $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{p}_3$ のとき

$x^2+y^2+z^2$ は最小値 $\frac{1}{8}$ をとります．

III

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}\right)$$

であることに注意します。$\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}<0$ から $A_2=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$ の固有値

α, β は $\alpha\beta<0$ であることが分かります。$\alpha>0,\ \beta<0$ とすると

$$A_2\begin{pmatrix}x_0\\z_0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_0\\z_0\end{pmatrix}\quad\left(\begin{pmatrix}x_0\\z_0\end{pmatrix}\neq\vec{0}\right)$$

を満たす $\begin{pmatrix}x_0\\z_0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ が存在して

$$\left(A\begin{pmatrix}x_0\\0\\z_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_0\\0\\z_0\end{pmatrix}\right)=\left(A_2\begin{pmatrix}x_0\\z_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_0\\z_0\end{pmatrix}\right)$$

$$=\alpha\left(\begin{pmatrix}x_0\\z_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_0\\z_0\end{pmatrix}\right)=\alpha\left(x_0^2+z_0^2\right)>0$$

他方

$$A_2\begin{pmatrix}x_1\\z_1\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}x_1\\z_1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}x_1\\z_1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

を満たす $\begin{pmatrix}x_1\\z_1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在します。このとき

$$\left(A\begin{pmatrix}x_1\\0\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\0\\z_1\end{pmatrix}\right)=\left(A_2\begin{pmatrix}x_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\z_1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\beta\left(\begin{pmatrix}x_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\z_1\end{pmatrix}\right)=\beta\left(x_1^2+z_1^2\right)<0$$

となります。よって 2次形式 $(A\vec{v},\vec{v})$ は正定値でも負定値でもないことが分かります。

IV　$\vec{p}_1 = \vec{a}_1$ とします。$(\mathbb{R}\vec{p}_1)^{\perp}$ の基底を $\vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_n$ と(＊)取ります。このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_n$ は線形独立となりますから $P = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n)$ は正則となります。

$$X\vec{p}_1 = (I_n + \vec{a}\,{}^t\vec{a})\vec{a}$$

$$= \vec{a} + \vec{a}\cdot\|\vec{a}\|^2 = \vec{a}(1+\|\vec{a}\|^2)$$

$2 \leq j \leq n-1$ のとき

$$X\vec{p}_j = (I_n + \vec{a}\,{}^t\vec{a})\vec{p}_j = \vec{p}_j + \vec{a}\cdot{}^t\vec{a}\vec{p}_j = \vec{p}_j$$

が

$(\vec{a}, \vec{p}_j) = (\vec{p}_1, \vec{p}_j) = 0$ から分かります。よって

$$XP = P\begin{pmatrix} 1+\|\vec{a}\|^2 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}XP = \begin{pmatrix} 1+\|\vec{a}\|^2 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$\det(X) = \det(P^{-1}XP) = 1+\|\vec{a}\|^2$$

であることが分かります。

(＊)

$$(\mathbb{R}\vec{p}_1) \oplus (\mathbb{R}\vec{p}_1)^{\perp} = \mathbb{R}^n$$

から $\dim(\mathbb{R}\vec{p}_1)^{\perp} = n-1$ であることに注意しましょう。

V　$\vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2, \vec{v}_3 \in V_3$ が $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$

を満たすとします。$\vec{v}_3$ との内積は

$$0 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_3) = (\vec{v}_1, \vec{v}_3) + (\vec{v}_2, \vec{v}_3) + \|\vec{v}_3\|^2$$
$$= \|\vec{v}_3\|^2$$

から $\vec{v}_3 = \vec{0}$ となります。従って $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$ であることが分かります。$\vec{v}_2$ との内積をとると

$$0 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) + \|\vec{v}_2\|^2$$
$$= \|\vec{v}_2\|^2$$

から $\vec{v}_2 = \vec{0}$、さらに $\vec{v}_1 = \vec{0}$ も分かります。以上で

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

であることが分かります。

VI

V_1 の基底 $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_k$

V_2 の基底 $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l$

V_3 の基底 $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_m$

とします。$\forall \vec{v} \in V_1 + V_2 + V_3$ をとると $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ ($\vec{v}_1 \in V_1$, $\vec{v}_2 \in V_2$, $\vec{v}_3 \in V_3$) と表わされます。

$$\vec{v}_1 = x_1 \vec{p}_1 + \cdots + x_k \vec{p}_k$$
$$\vec{v}_2 = y_1 \vec{q}_1 + \cdots + y_l \vec{q}_l$$
$$\vec{v}_3 = z_1 \vec{r}_1 + \cdots + z_m \vec{r}_m$$

と表わされますから

$$\vec{v} = x_1 \vec{p}_1 + \cdots + x_k \vec{p}_k + y_1 \vec{q}_1 + \cdots + y_l \vec{q}_l + z_1 \vec{r}_1 + \cdots + z_m \vec{r}_m$$

から

$$\vec{v} \in L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_k, \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l, \vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_m)$$

であることが分かります。

$$x_1 \vec{p}_1 + \cdots + x_k \vec{p}_k + y_1 \vec{q}_1 + \cdots + y_l \vec{q}_l + z_1 \vec{r}_1 + \cdots + z_m \vec{r}_m = \vec{0}$$

とすると $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ から

$$x_1 \vec{p}_1 + \cdots + x_k \vec{p}_k = y_1 \vec{q}_1 + \cdots + y_l \vec{q}_l + z_1 \vec{r}_1 + \cdots + z_m \vec{r}_m = \vec{0}$$

となり、$x_1 = \cdots = x_k = y_1 = \cdots = y_l = z_1 = \cdots = z_m = 0$ が従います。

よって

$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_k, \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l, \vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_m$$

は線型独立であることが分かり $V_1 + V_2 + V_3$ の基底である

ことが分かります．よって

$$\dim(V_1+V_2+V_3)=k+l+m=\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3$$

（別解）

$$V_1+\cdots+V_\ell=(V_1+\cdots+V_{\ell-1})+V_\ell$$

であることが示せます．$V_1+\cdots+V_\ell$ が直和のとき．

$$(V_1\oplus\cdots\oplus V_{\ell-1})\oplus V_\ell$$

であることが示せます．これから

$$\dim(V_1\oplus\cdots\oplus V_\ell)=\dim(V_1\oplus\cdots\oplus V_{\ell-1})+\dim V_\ell$$

$$=\cdots=\dim V_1+\cdots+\dim V_{\ell-1}+\dim V_\ell$$

2019 年 12 月 13 日演習問題

VII $V \subset \mathbf{R}^n$ は部分空間とします。

(1)

$$V^{\perp} = \{\vec{w} \in \mathbf{R}^n; (\vec{v}, \vec{w}) = 0\ (\vec{v} \in V)\}$$

が $\mathbf{R}^n$ の部分空間であることを示しましょう（V の直交補空間と呼びます）.

(2) V_1, V_2 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします。

$$V_1 \subset V_2$$

が成立するならば $V_1^{\perp} \supset V_2^{\perp}$ が成立することを示しましょう。

(3) V_1, V_2 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします。

$$(V_1 + V_2)^{\perp} \subset V_j^{\perp}\ (j = 1, 2)$$

を示しましょう。

(4) V_1, V_2 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします。

$$(V_1 + V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$$

であることを示しましょう。

解答 (1) $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V^{\perp}$ とします．このとき $\vec{v} \in V$ に対して

$$(1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2, \vec{v}) = c_1(\vec{w}_1, \vec{v}) + c_2(\vec{w}_2, \vec{v}) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

から $c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 \in V^{\perp}$ であることが分かります．従って $V^{\perp}$ は線型部分空間であることが示されました．

(2) $\vec{w} \in V_2^{\perp}$ とします．$\vec{v}_1 \in V_1$ であると $\vec{v}_1 \in V_2$ となりますから

$$(\vec{w}, \vec{v}_1) = 0$$

が従います．よって $\vec{w} \in V_2^{\perp}$ であることが分かります．

(3) $V_1, V_2 \subset V_1 + V_2$ が成立しますから (3) を用いると

$$(V_1 + V_2)^{\perp} \subset V_1^{\perp},\ (V_1 + V_2)^{\perp} \subset V_2^{\perp}$$

が分かります．

(4) (2) から

$$(V_1 + V_2)^{\perp} \subset V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$$

が分かります．逆に $\vec{w} \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$ とします．$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ が $\vec{v}_1 \in V_1$, $\vec{v}_2 \in V_2$ に対して成立しているとすると $\vec{w} \in V_1^{\perp}$ かつ $\vec{w} \in V_2^{\perp}$ が成立しますから

$$(\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{v}_1) + (\vec{w}, \vec{v}_2) = 0$$

となります．これは $V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp} \subset (V_1 + V_2)^{\perp}$ を意味します．以上で $(V_1 + V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$ を示しました．

注意 さらに (3) の両辺の直交補空間を考えると

$$(V_1 \cap V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} + V_2^{\perp}$$

が導けます．

VIII (1)

一般に $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$

であることを用いる. $\mathbb{R}^m$ 中

$$\mathrm{Im}(B) \subset \mathbb{R}^m$$

なので $\mathbb{R}^l$ 中

(i) $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$

であることが分かります. 実際 $\forall \vec{v} \in \mathrm{Im}(AB)$ に対して $\exists \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend left, "f_{AB}"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "f_A"'] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

$$\vec{v} = AB\vec{w}$$

となりますが $B\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ なので $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$. (i) から

$$\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$$

が分かります. $\dim \mathrm{Im}(B) = m_0$ とする. このとき $\vec{v} \in \mathrm{Im}(AB)$ に対して $\exists \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ が存在して

$$\vec{v} = A(B\vec{w})$$

となりますが, $\mathrm{Im}\, B$ の基底を $\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_{m_0}$ とすると

$$\vec{v} = A(c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_{m_0}\vec{\beta}_{m_0})$$
$$= c_1 A\vec{\beta}_1 + \cdots + c_{m_0} A\vec{\beta}_{m_0}$$

から

$\mathrm{Im}(AB)$ が $A\vec{\beta}_1, \cdots, A\vec{\beta}_{m_0}$ で生成されることが分かります. よって

$$\mathrm{rank}(AB) = \dim \mathrm{Im}(AB) \leq m_0 = \mathrm{rank}(B)$$

(2) $AB = O$ から

$$\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$$

が分かります.

$$\dim \mathrm{Im}(B) \leq \dim \mathrm{Ker}(A)$$

が分かります. 次元定理から

$$\dim \mathrm{Im}(A) = m - \dim \mathrm{Ker}(A)$$

となりますから

$$\dim \mathrm{Im}(B) \leq m - \dim \mathrm{Im}(A)$$

から

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) \leq m$$

であることが分かります.