2019 年 12 月 20 日確認問題

I　$\mathbf{R}^n$ の部分空間 V に対して

$$\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = V$$

が成立することを証明しましょう．

II　$A \in M_n(\mathbf{R})$ が対称であるとします．$\mathbf{R}^n$ の部分空間 V が A-不変であるとき，すなわち

$$\vec{v} \in V \Rightarrow A\vec{v} \in V$$

が成立するならば，$V^{\perp}$ も A-不変であることを示しましょう．

III　**(1)** $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbf{K})^*$, $A_0, B_0 \in M_n(\mathbf{K})$ とします．

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbf{a} \\ \hline \vec{0} & A_0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} \beta & \mathbf{b} \\ \hline \vec{0} & B_0 \end{array}\right)$$

に対して

$$AB = A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\beta & * \\ \hline \vec{0} & A_0 B_0 \end{array}\right)$$

となることを示しましょう．

(2) $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ に対して

$$f(A) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\beta & * \\ \hline \vec{0} & f(A_0) \end{array}\right)$$

となることを示しましょう．

IV　$A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とします．

(1) $(\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \ker({}^t A)$ であることを示しましょう．

(2) $\mathrm{Im}({}^t A) = \ker(A)^{\perp}$ であることを示しましょう．

V　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しましょう．

VI　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しましょう．

VII

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} - \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

に対して 2 次曲面

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + c\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + 2 = 0$$

を考えます．平行移動の座標変換と直交座標変換を用いて，この 2 次曲線を簡単に表しましょう．

VIII　$\mathbf{R}^n$ の部分空間 V の正規直交基底 $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell$ を用いて V の直交射影 P を

$$P\vec{x} = \sum_{j=1}^{\ell} (\vec{p}_j, \vec{x})\vec{p}_j$$

を定義しました．

$$P^2 = P, \quad {}^t P = P$$

が成立することを示しましょう．

IX　VIII の状況で $Q = I_n - P$ とすると Q が $V^\perp$ への直交射影となることを示しましょう.

X　Presentation「正則性」の定理 2 を用いて以下を示しましょう.

$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\ell \in \mathbf{K}^n$ が線型独立であるとき $\vec{a}_{\ell+1}, \ldots, \vec{a}_n$ が存在して

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\ell, \vec{a}_{\ell+1}, \ldots, \vec{a}_n \text{が線型独立となる}$$

I $\vec{w} \in V^{\perp}$ を任意にとると $\vec{v} \in V$ は

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

を満たします。よって $\vec{v} \in (V^{\perp})^{\perp}$ となります。

$$V \subset (V^{\perp})^{\perp}$$

が分かりますが $\dim V = l$ とすると $V^{\perp} = n - \dim V = n - l$

$\dim (V^{\perp})^{\perp} = n - (n - l) = l$ から

$$V = (V^{\perp})^{\perp}$$

であることが分かります。

II $\vec{w} \in V^{\perp}$ とする。このとき $A\vec{w}$ は $\forall \vec{v} \in V$ に対して

$$(A\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{w}, A\vec{v}) = 0 \qquad A\vec{v} \in V$$

を満たします。よって

$$A\vec{w} \in V^{\perp}$$

が分かりました。

III (1) $\mathbb{b} = (b_1 \cdots b_n)$ $B_0 = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)$ とすると B の

第 $j+1$ 列は $\begin{pmatrix} b_j \\ \vec{e}_j \end{pmatrix}$ となり

$$A \begin{pmatrix} e_j \\ \vec{e}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e_j + a_1 \vec{e}_j \\ A_0 \vec{e}_j \end{pmatrix}$$

となりますから

$$AB = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha\beta & \alpha e_1 + \mathbf{a}\vec{e}_1 & \cdots & \alpha e_n + \mathbf{a}\vec{e}_n \\ \hline \vec{0} & A_0\vec{e}_1 & \cdots & A_0\vec{e}_n \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \alpha\beta & \alpha\mathbf{b} + \mathbf{a}B_0 \\ \hline \vec{0} & A_0 B_0 \end{array}\right)$$

であることが分かります.

(2)

$$A^{\ell} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha^{\ell} & * \\ \hline \vec{0} & A_0^{\ell} \end{array}\right)$$

となるので $f(\lambda) = c_m\lambda^m + \cdots + c_1\lambda + c_0$

とすると

$$f(A) = c_m \left(\begin{array}{c|c} \alpha^m & * \\ \hline \vec{0} & c_m A_0^m \end{array}\right)$$

$$+ \cdots + c_1 \left(\begin{array}{c|c} \alpha & * \\ \hline \vec{0} & c_1 A_0 \end{array}\right) + c_0 \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \vec{0} & I_n \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} f(\alpha) & * \\ \hline \vec{0} & f(A_0) \end{array}\right)$$

となります.

IV' $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ に対して

(*) $\vec{v} \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp} \iff (\vec{v}, \vec{w}) = 0 \quad (\forall w \in \mathrm{Im}(A))$

$\forall \vec{w} \in \mathrm{Im}(A)$ は $\vec{w} = A\vec{u}$ と $\exists \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ で書けるから

$$0 = (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, A\vec{u}) = ({}^tA\vec{v}, \vec{u})$$

となります. 従って

$$\vec{v} \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp} \iff ({}^tA\vec{v}, \vec{u}) = 0 \quad (\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n)$$

$$\iff {}^tA\vec{v} = \vec{0}$$

から

$$\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \mathrm{Ker}({}^tA)$$

V 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しましょう．

解答

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-5 & \lambda-5 & \lambda-5 & \lambda-5 \\ -1 & \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^3(\lambda-5)
\end{aligned}$$

（ここまでは 12 月 08 日を再利用）

次に固有ベクトルを求めます．

<u>(i) $\lambda = 1$ のとき</u>固有多項式を求めるときの行基本変形を用いると

$$I_4 - A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できることが分かります．従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V(1) \quad \Leftrightarrow x+y+z+w = 0$$

が分かります．このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x-y-w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

から $V(1)$ の基底として

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれます．$\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ に Gram-Schmidt の直交化を適用して $V(1)$ の正規直交基底を求めます．$\vec{w}_1$ を $\vec{q}_2$ の $\vec{q}_1$ 方向への直交射影とすると

$$\vec{w}_1 = \frac{(\vec{q}_2, \vec{q}_1)}{||\vec{q}_1||^2}\vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と求まります．ここで $\vec{q}_1$ に垂直な $V(1)$ のベクトルとして

$$\vec{q}_2 - \vec{w}_1 = \vec{q}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれます．ここで

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{||\vec{q}_1||}\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{||\vec{q}_2 - \vec{w}_1||}(\vec{q}_2 - \vec{w}_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in V(1)$ は正規直交系です．さらに $\vec{q}_3$ の $V = \mathbf{R}\vec{p}_1 + \mathbf{R}\vec{p}_2$ への直交射影を $\vec{w}_2$ とすると

$$\vec{w}_2 = (\vec{q}_3, \vec{p}_1)\vec{p}_1 + (\vec{q}_3, \vec{p}_2)\vec{p}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となります．ここで V に垂直な $V(1)$ のベクトル $\vec{q}_3 - \vec{w}_2$ を大きさ 1 にして

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{||\vec{q}_3 - \vec{w}_2||}(\vec{q}_3 - \vec{w}_2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は $V(1)$ の正規直交基底となります．

(ii) $\lambda = 5$ のとき

$$5I_4 - A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形ができますから

$$(x\ y\ z\ w) \in V(5) \quad \Leftrightarrow x = y = z = w$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} w \\ w \\ w \\ w \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (w \neq 0)$$

であることが分かります．これから

$$\vec{p}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3\ \vec{p}_4)$ は直交行列となって

$$AP = P\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}$$

と対角化できます．

(VI)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ を直交行列で対角化する.

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{1r+=4r,\ 2r+=3r}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-3)^2$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$ である. 固有ベクトルを求める.

<u>$\lambda = 1$ のとき.</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = z,\ x = w$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ z \\ z \\ w \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} w \neq 0 \\ \text{or} \\ z \neq 0 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルである.

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ が $V(1)$ の正規直交基底

λ = 3のとき

$$A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff x = -w,\ y = -z$$

から

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w\\ -z\\ z\\ w\end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} w \neq 0 \text{ OR} \\ z \neq 0\end{pmatrix}$$

が固有ベクトルである.

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad \vec{p}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

が $V(3)$ の正規直交基底である.

A が対称なので $V(1) \perp V(3)$ なので

$$(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \quad (i = 1, 2,\ j = 3, 4)$$

も分かるので

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3\ \vec{p}_4)$$

は直交行列で

$$AP = P\begin{pmatrix} 1&&&\\ &1&&\\ &&3&\\ &&&3\end{pmatrix}$$

から

$$^tPAP = \begin{pmatrix} 1&&&\\ &1&&\\ &&3&\\ &&&3\end{pmatrix}$$

と対角化できる.

VII $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \vec{\alpha}$ $\quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$ とすると

$$\left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right) + 2\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right) + 2 = 0$$

となります。これを展開すると

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}+\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + 2(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 2 = 0$$

となりますから $A\vec{\alpha} = -\vec{b}$ とします。

$$\vec{\alpha} = -A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix}7&3&5\\3&7&5\\5&5&25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix}0\\0\\40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$$

となります。

$$\begin{aligned}(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + 2(\vec{b}, \vec{\alpha}) &= (-\vec{b}, \vec{\alpha}) + 2(\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right) = -4\end{aligned}$$

から このとき 2次曲面は

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\right) - 2 = 0$$

と $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ 座標で表わされます。次に A を直交行列で対角化します。

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{1\text{行}+=(2\text{行})\times(-1)}{=} \begin{vmatrix} \lambda-5 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5)(\lambda^2-5\lambda+4) = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-5)$$

となります。次に固有ベクトルを求めます。

$\underline{\lambda=1}$ $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow x - \frac{1}{2}z = 0,\ y - \frac{1}{2}z = 0$$

となりますから 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

$\underline{\lambda=4}$ $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow x + z = 0,\ y + z = 0$$

から 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

$\underline{\lambda=5}$ $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow x + y = 0,\ z = 0$$

から $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルです。

$$\vec{p_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \vec{p_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \vec{p_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると $P=(\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})$ は直交行列となり

$$AP = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 5 \end{pmatrix} \text{ から } {}^{t}PAP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

と対角化できます。このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

と直交座標変換をとると

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \xi^2 + 4\eta^2 + 5\zeta^2$$

となります。従ってこの曲面は

$$\xi^2 + 4\eta^2 + 5\zeta^2 = 2$$

と表されます。

VIII $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1 \quad \vec{x}_0 \in V,\ \vec{x}_1 \in V^{\perp}$ と直交分解をとると

$$P\vec{x} = \vec{x}_0$$

となります。さらに

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_0 + \vec{0} \quad (\vec{x}_0 \in V,\ \vec{0} \in V^{\perp})$$

と直交分解されますから

$$P^2\vec{x} = P\vec{x}_0 = \vec{x}_0 = P\vec{x}$$

が任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して成立します。よって

$$P^2 = P.$$

となります。

この前段でように $\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{y}_1$ $(\vec{y}_0 \in V,\ \vec{y}_1 \in V^{\perp})$ と直交分解をとります。

$$(P\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}_0, \vec{y}_0 + \vec{y}_1) = (\vec{x}_0, \vec{y}_0)$$
$$= (\vec{x}_0 + \vec{x}_1, \vec{y}_0) = (\vec{x}, \vec{y}_0)$$

となります。

$$(P\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tP\vec{y})$$

から

$$(\vec{x}, {}^tP\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}_0)$$

が任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して成立しますから

$${}^tP\vec{y} = \vec{y}_0 = P\vec{y}$$

が任意の $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して成立します。よって

$${}^tP = P.$$

IX 任意の $\vec{x}$ を $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$ $(\vec{x}_0 \in V, \vec{x}_1 \in V^{\perp})$ と直交分解をとると

$$Q\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0 = \vec{x}_1$$

となります.

$$\vec{x} - Q\vec{x} = \vec{x}_0 \in V$$

から

$$(\vec{x} - Q\vec{x}, \vec{w}) = 0 \qquad (\vec{w} \in V^{\perp})$$

が成立しますから

$$\begin{cases} \vec{x} - Q\vec{x} = (I_n - Q)\vec{x} \in (V^{\perp})^{\perp} = V \\ Q\vec{x} \in V^{\perp} \end{cases}$$

となります. よって Q は $V^{\perp}$ への直交射影となります.

×　定理2を用いると ある正則行列 $P \in M_n(\mathbb{K})$ が存在して

$$P(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_\ell) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell)$$

となります $\ell+1 \leq j \leq n$ に対して

$$\vec{a}_j = P^{-1}\vec{e}_j$$

とすると

$$P(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_\ell\ \vec{a}_{\ell+1} \cdots \vec{a}_n) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell\ \vec{e}_{\ell+1} \cdots \vec{e}_n)$$

となりますから．

$$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell, \vec{a}_{\ell+1}, \cdots, \vec{a}_n$$

は線形独立であることがわかります．