・偏微分係数と　　・開集合.

・極大(小)の必要条件 ← 補足.

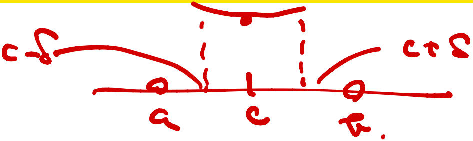
極大・極小の必要条件（補足）

接平面.

Nobuyuki TOSE

微分積分第 2 講義 Part 01, Oct 12, 2020

（復習）極大・極小の必要条件 (1 変数の場合)



定理（復習）

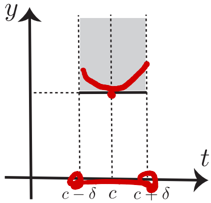
各点で微分可能な $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ が $c \in]a,b[$ で極大（または極小）ならば

$$f'(c)=0$$

不成立.

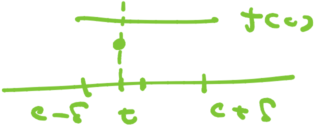
$f(c)$ が極小値である

$$\Leftrightarrow \exists\delta>0\,(c-\delta<t<c+\delta \quad \Rightarrow \quad f(t)\ge f(c))$$



極小でないとは

$\mathrm{Not}(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \mathrm{Not}(Q)$



$\forall t \in (a, b)$

$f(c)$ が極小値でない

$$\Leftrightarrow NOT\ \exists\delta > 0\ (c - \delta < t < c + \delta \quad \Rightarrow \quad f(t) \geq f(c))$$

$$\Leftrightarrow \forall\delta > 0\ NOT\ (c - \delta < t < c + \delta \quad \Rightarrow \quad f(t) \geq f(c))$$

$$\Leftrightarrow \forall\delta > 0\ \exists t \in (c - \delta, c + \delta)\ f(t) < f(c)$$

否定

X 集合. $P(x)$ 命題関数.

$\mathrm{Not}(\exists x \in X\ P(x)) \equiv \forall x \in X\ (\mathrm{Not}\ P(x))$

定理の逆は成立するか？ (1)

定理の**逆**は成立しません．

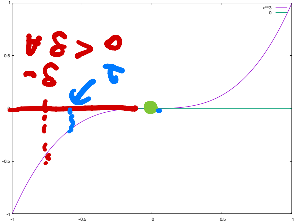
反例 $f(t) = t^3$ とすると $f'(t) = 3t^2$ なので $f'(0) = 0$ から $t = 0$ は f の停留点である．任意の $\delta > 0$ に対して

$$-\delta < t < 0 \Rightarrow f(t) < 0 = f(0)$$

であるので

$$-\delta < t < \delta \ \Rightarrow f(t) \geq f(0) = 0$$

を満たす正数 $\delta > 0$ は存在しません．従って f は $t = 0$ で極小ではありません．



定理の逆は成立するか？ (2)　極大

$f'(0) = 0$

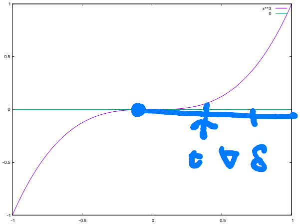
他方，任意の $\delta > 0$ に対して

$$0 < t < \delta \Rightarrow f(0) = 0 < f(t)$$

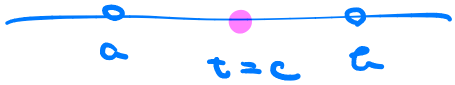
であるので

$$-\delta < t < \delta \ \Rightarrow f(t) \leq f(0) = 0$$

を満たす正数 $\delta > 0$ は存在しません．従って f は $t = 0$ で極大ではありません．



極大・極小の十分条件



定理

$f :]a,b[\to \mathbf{R}$ が $]a,b[$ の各点で微分可能，f' も $]a,b[$ の各点で微分可能とします．さらに f'' が $]a,b[$ の各点で連続とします．このとき $t = c \in]a,b[$ において

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) > 0 \quad (\text{resp. } f''(c) < 0)$$

ならば f は $t = c$ で極小（resp. 極大）となります．

$\exists \delta > 0$

$g(t) > 0$

常に $(c-\delta < t < c+\delta)$

この定理も前期に証明しました．

・Taylorの定理を使う，$f'' > 0$

・連続関数の性質

$g : t=c$ で連続，$g(c) > 0$

極大点・極小点であることの必要条件（復習）

U

$P_0(a, b)$

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f : \; U \to \mathbf{R}$$

が U の各点 $\mathrm{P} \in U$ で x, y について偏微分できると仮定します.

← 不成立.

Theorem

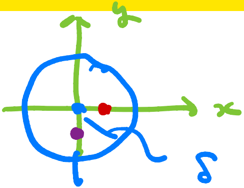
f が $\mathrm{P}_0(a, b) \in U$ で極小（極大）ならば

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \tag{1}$$

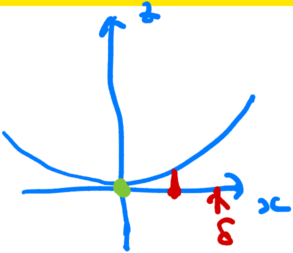
が成立します.

この状況で (1) を満たす点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ を f の**停留点**と呼びます.

停留点であることは極大・極小の十分条件ではない (1)



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



$y=0$ の断面

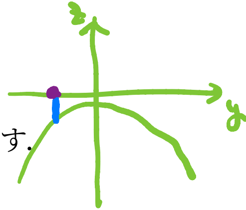
を考えましょう.

$$f_x(x, y) = 2x = 0, \quad f_y(x, y) = -2y = 0$$

から f の停留点は $(x, y) = (0, 0)$ です.

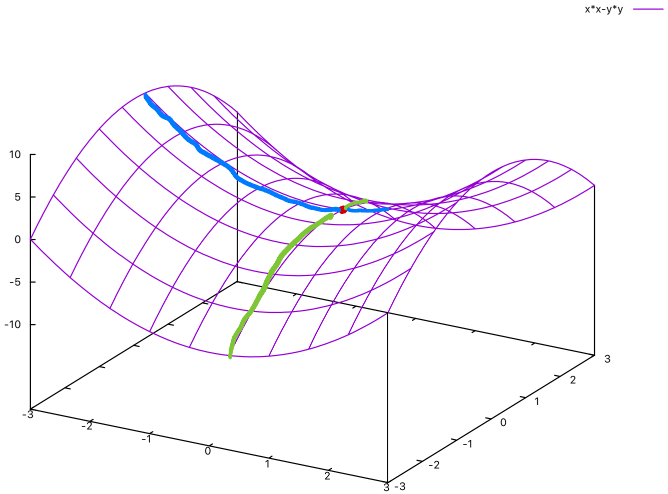
$$f(x, 0) = x^2, \quad f(0, y) = -y^2$$

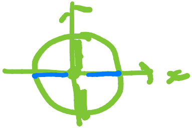
から $(0, 0)$ で f は極大でも極小でもないことが分かります.



$x=0$ の断面.

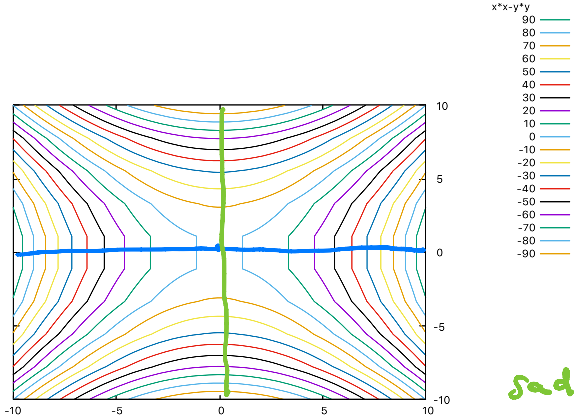
停留点であることは極大・極小の十分条件ではない (2)





$z = x^2 - y^2$

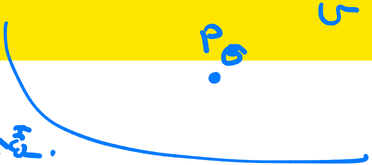
停留点であることは極大・極小の十分条件ではない (3)



saddle point.

鞍点 col.

極大・極小の十分条件



f_x, f_y, f_{xx} が存在

定理 f, f_x, f_y, f_{xx} が連続.

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の C^2 級関数 $f: U \to \mathbf{R}$ に対して $\mathrm{P}_0(a, b) \in U$ が停留点であるとします.

Hesse 行列式

$$f_x(\mathrm{P}_0) = f_y(\mathrm{P}_0) = 0$$

(1) $\begin{vmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}_0) & f_{xy}(\mathrm{P}_0) \\ f_{yx}(\mathrm{P}_0) & f_{yy}(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix} > 0,\ f_{xx}(\mathrm{P}_0) > 0$ (resp. $f_{xx}(\mathrm{P}_0) < 0$)

であるならば P_0 で f は極小（resp. 極大）となります.

(2) $\begin{vmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}_0) & f_{xy}(\mathrm{P}_0) \\ f_{yx}(\mathrm{P}_0) & f_{yy}(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix} < 0$ ならば f は f は P_0 で f は極小でも極大でもありません.

今後当分の間，この定理の証明の準備をしながらいろんなことを学びます.