2 変数 2 次形式とその正定値性

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ 対称行列

Nobuyuki TOSE

V01 Oct 19, 2020 for CalcNT

$ax^2 + 2cxy + by^2 = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$\Longleftrightarrow$

$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0\right) \Longleftrightarrow |A| > 0,\ a > 0$

対称行列

$${}^tA = A.$$

(1, 2)

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ を**対称行列**と呼びます．転置作用素を用いると

(2, 1)

$${}^tA = {}^t\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = A$$

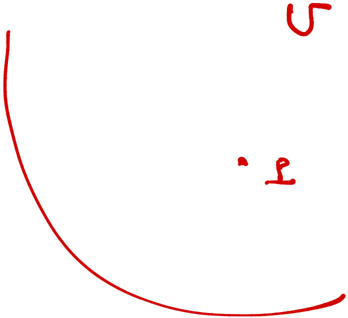
となります（固有値問題で重要になります）．

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)}_{\text{内積}} = ax^2 + 2cxy + by^2$$

を対称行列 A が定める（2 変数）2 次形式と呼びます.

Hesse 行列が定める 2 次形式 (1)



$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の C^2 級関数

$$f : U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとき，$\mathrm{P} \in U$ に対して

$$H(f)(\mathrm{P}) := \begin{pmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}) & f_{xy}(\mathrm{P}) \\ f_{yx}(\mathrm{P}) & f_{yy}(\mathrm{P}) \end{pmatrix}$$

を f の P における Hesse 行列と呼びます．Young の定理から

$$f_{xy}(\mathrm{P}) = f_{yx}(\mathrm{P}) \quad = (f_y)_x \,.$$

が成立しますから，$H(f)(\mathrm{P})$ は対称行列です．

$= (f_x)_y$

Hesse 行列が定める 2 次形式 (2)

$\mathrm{P}_0(a, b) \in U$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して 1 変数関数を $\mathrm{P}_t(a + t\alpha, b + t\beta)$ を用いて

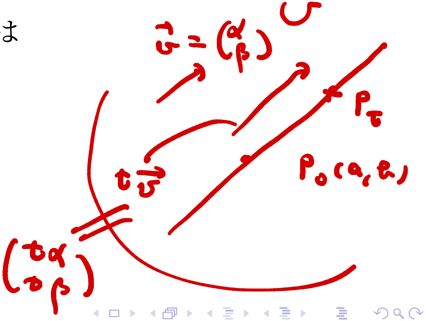
$$F(t) := f(\mathrm{P}_t) = f(a + \alpha t, b + \beta t)$$

と定義します．このとき f の P_t における $\vec{v}$ 方向の 2 階微分は

$$F''(t) = (H(f)(\mathrm{P}_t)\vec{v}, \vec{v})$$

と 2 次形式として表されます．

条件 $F''(t) > 0$ $(\forall \vec{v} \neq \vec{0})$ が必要になる



2 次形式の正定値性 (1)

負 —

$(A\vec{o}, \vec{o}) = 0.$

定義

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$ が**正定値**であるとは

A:対称.

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{o})$$

<

定理

$(A\vec{v}, \vec{v})$ が正定値 $\Leftrightarrow a > 0,\ |A| = ab - c^2 > 0$ $\Longleftrightarrow$ Aの固有値 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が $\alpha, \beta > 0.$

負定値 $a < 0,\ |A| > 0.$

$\Longleftarrow$

2 次形式の正定値性 (2)—定理の証明 (⇐)

$a>0,\ |A| = ab - c^2 > 0.$

注意 $p, q \in \mathbf{R}$ に対して $p, q \geq 0,\ p+q=0 \Rightarrow p=q=0$

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \boxed{by^2 - \frac{c^2}{a}y^2}$$
$$= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab-c^2}{a}y^2 \geq 0$$

$|A| = ab - c^2.$

xに関して平方完成
making square

等号成立するときは.

において，最後の不等号の等号成立条件は

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = \boxed{\frac{ab-c^2}{a}}y^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{c}{a}y = y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

従って $x \neq 0$ または $y \neq 0$ ならば $ax^2 + 2cxy + by^2 > 0$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq 0$

$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)>0$ $\quad \left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq 0\right)$

$0 < \left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = a$ に注意する．さらに $a>0$ の下で

$ax^2+2cxy+by^2$

$$\frac{ab-c^2}{a} > 0 \Leftrightarrow ab-c^2>0$$

である．ここで

$x=-\frac{c}{a}$, $y=1$

$$0 < \left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{ab-c^2}{a}$$

から $ab-c^2>0$ が従います．

$= a\left(x+\frac{c}{a}y\right)^2+\frac{ab-c^2}{a}y^2$

$\left(\begin{array}{l} x+\frac{c}{a}y=0 \\ y=1 \end{array}\right)$

注意

同様に

定理

$(A\vec{v},\vec{v})$ が負定値 $\Leftrightarrow (A\vec{v},\vec{v}) < 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow a < 0,\ |A| = ab - c^2 > 0$

$\Updownarrow$

$(A\vec{v},\vec{v}) < 0$

$(\vec{v} \neq \vec{0})$