行列に関する補足 (1)

正則性

Nobuyuki TOSE

Oct. 18, 2017
V02 Oct. 03, 2019
V03 Oct. 19, 2020 for CalcNT

I_2 単位行列
identity matrix.
tilde

~~E_2 einsmatrix.~~

余因子行列

$|A| = ad - bc$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3×3 の余因子行列.

を A の**余因子行列**と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}}_{= |A| I_2}$$

から

証.

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2$$

が従う.

注意

$AB \in M_2(\mathbb{R})$

2 次正方行列 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) \in M_2(\mathbf{R})$, $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2) \in M_2(\mathbf{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$
$$\lambda(\mu A) = (\lambda \cdot \mu)A$$

$|A| \neq 0$ とする

$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2$

$\frac{1}{|A|}(A\tilde{A}) = \frac{1}{|A|}(\tilde{A}A) = \frac{1}{|A|}(|A| \cdot I_2) = \left(\frac{1}{|A|} \cdot |A|\right) I_2 = I_2$

$= A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)$, $= \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) A$

正則性

正則行列

2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対してある $X \in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$AX = XA = I_2$$

が成立するとき A は正則であるという.

唯一つ
一意

注意

2つあると → 等しい
仮定.

$$\left.\begin{array}{l} AX = XA = I_2 \\ AY = YA = I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X = Y$$

結合則

が成立するので X を A の**逆行列**と呼ぶ（A^{-1} と記す).

$= (YA)X = I_2 X = X$

$AX = I_2 \to Y(AX) = Y \cdot I_2 = Y$

正則性（十分条件）

定理

$|A| = ad - bc \neq 0$ ならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2$$

の両辺を $\frac{1}{|A|}$ 倍する．

$$A\overbrace{\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)}^{X} = \overbrace{\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)}^{X} A = I_2$$

正則性の必要条件

定理

(1) A が正則 $\Rightarrow \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$

(2) $|A| \neq 0 \;\Rightarrow\; \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(1)

A^{-1}

$$A\vec{v} = \vec{0} \longrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{= I_2}\vec{v} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0} \longrightarrow \vec{v} = I_2\vec{v} = \vec{0}$$

$I_2\vec{v}$

(2)

クラメールに

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

行列式

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ しかない.

定理

(3) ((2) の逆) $\left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}\right) \Rightarrow |A| \neq 0$

(3)' ((3) の対偶) $|A| = 0 \Rightarrow$ ある$\vec{v} \neq \vec{0}$に対して$A\vec{v} = \vec{0}$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(3)' を示す. $|A| = ad - bc = 0$ ならば

$A\tilde{A} = |A| I_2 = O_2$

p134, 2.8.4

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}} = \vec{0}$$

$A\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \vec{0}$, $A\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{0}$

(i)

となるので, $NOT(a = b = c = d = 0)$ ならばある $\vec{v} \neq \vec{0}$ が $A\vec{v} = \vec{0}$ を満たす. 他方 $a = b = c = d = 0$ のときは明らかである.

$\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ or $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

(ii) (i)でない場合. $O_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

まとめ

以上によって次の定理を示した.

定理

以下の (i),(ii),(iii) は同値である.

(i) A は正則である.

(ii) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(iii) $|A| \neq 0$

(i) → (ii)

↓ 次回.

(iii)

$\boxed{|A| \neq 0 \Rightarrow A\text{は正則}}$

3次でできますか？

n次正方行列でもOK.

補足 (i)⇒(iii) の別証明

$A \in M_2(\mathbf{K})$ が正則とする．このとき

$$AA^{-1} = I_2$$

$= |I_2| = 1$

両辺の行列式を考えると

$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|, \quad |I_2| = 1$$

から $|A| \neq 0$ が従います.

> $A, B \in M_2(\mathbf{K})$ に対して
>
> $$|AB| = |A| \cdot |B|$$