行列に関する補足 (2)

回転行列

Nobuyuki TOSE

Oct 18, 2017
V02 Oct 03, 2019
V03 Oct 19, 2020 for CalcNT

回転行列

回転行列

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$$ を**回転行列**と呼ぶ.

$\theta = 0$

$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$R_{\theta_1}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

加法定理.

から

$$R_{\theta_1}R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

回転行列の逆は回転行列

$$\exists X \in M_2(\mathbb{R})\quad AX = XA = I_2$$

$$\Updownarrow$$

特に $\theta_1 = \alpha,\ \theta_2 = -\alpha$（$\theta_1 = -\alpha,\ \theta_2 = \alpha$）とすると

$$R_\alpha R_{-\alpha} = R_{-\alpha} R_\alpha = R_0 = I_2$$

から回転行列 R_α は正則で

A が正則

$$\begin{cases} AX = XA = I_2 \\ AY = YA = I_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$X = Y.$$

$$(R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= {}^t\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = {}^tR_\alpha$$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$${}^tR_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(R_\alpha)^{-1} = {}^tR_\alpha}$$

結構大事

なぜ回転？

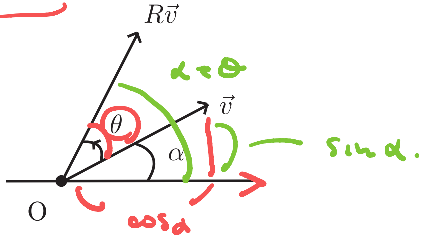
$$R_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

$\theta_1 \to \theta$

$\theta_2 \to \alpha$.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}}_{\text{単位ベクトル}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

から R_θ がベクトルを角度 θ 回転することが分かります.



転置行列 (1)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$ に対して転置行列を

$A,\ {}^tA \in M_2(\mathbb{R})$

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{a}_1\ {}^t\mathbf{a}_2) \tag{1}$$

と定義します.

$A\vec{v},\ {}^tA\vec{w} \in \mathbb{R}^2.$

転置行列の基本性質

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

$\vec{v} = \binom{x}{y}$ に対して

$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$

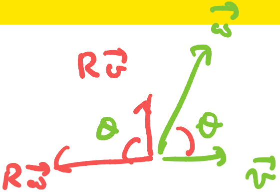
$$
\begin{aligned}
(A\vec{v}, \vec{w}) &= (x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2, \vec{w}) = x(\vec{a}_1, \vec{w}) + y(\vec{a}_2, \vec{w}) \\
&= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{w}) \\ (\vec{a}_2, \vec{w}) \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \vec{w} \\ {}^t\vec{a}_2 \vec{w} \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} \vec{w} \right) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})
\end{aligned}
$$

$$(\vec{a}, \vec{e}) = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

$$= (a_1\ a_2) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{e}) = {}^t\vec{a}\,\vec{e}}$$

回転行列の性質 (1)



R 回転.

定理

$$(R_\theta \vec{v}, R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

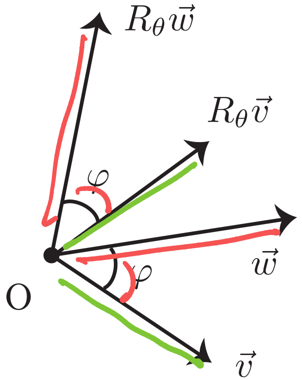
$$(R_\theta \vec{v}, R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, \underbrace{{}^t(R_\theta)}_{= R_\theta^{-1}} R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, \overbrace{(R_\theta)^{-1} R_\theta}^{= I_2} \vec{w}) = (\vec{v}, I_2 \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \qquad (2)$$

回転行列の性質 (2)

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^2$ のなす角が φ ならば

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\varphi$$

であることを用いると，前のページの公式 (2) はほぼ明らかであろう．



回転行列の性質 (2)

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^2$ のなす角が φ ならば

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\varphi$$

であることを用いると，前のページの公式 (2) はほぼ明らかであろう．