$a, b, c \in \mathbb{R}$

実 2 次対称行列の対角化

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = A.$

対称行列

May 2019 for emath

V03 Oct 2020 for CalcNT

回転座標変換

$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ax^2 + 2cxy + by^2. = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2.$

実 2 次実対称行列の固有方程式

${}^tA = A$

- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ の固有多項式

$\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| \\
&= \boxed{\begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix}} = (\lambda-a)(\lambda-b)-(-c)^2 \\
&= \lambda^2 - (a+b)\lambda + \boxed{ab - c^2} = \det(A)
\end{aligned}
$$

$\alpha + \beta = a + b$

$ab - c^2 = \alpha\beta$

- 2 次方程式 $\Phi_A(\lambda) = 0$ の判別式 (discriminant)

$$
D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0
$$

$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$

$p, q \in \mathbb{R}$ $p, q \geq 0$

$p + q = 0 \iff p = q = 0$

$\iff (a-b)^2 = 4c^2 = 0$

$\iff a = b, c = 0$

2 次実対称行列の固有方程式 (No. 2)

$\Phi_A(\lambda)$ の2解 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- **定理**　2 次実対称行列の固有値は実数である。
- **注意**　$D = 0$ のとき

$\Updownarrow$

$\alpha = \beta$

$$a = b, \ c = 0 \quad 従って \quad A = aI_2$$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$= aI_2.$

- 以下 $D > 0$ とする。$\Phi_A(\lambda) = 0$ の 2 解を α と β として

$$\alpha \neq \beta$$

- このとき

$$\alpha + \beta = a + b, \quad \alpha\beta = ab - c^2 = \det(A)$$

$\| \ \mathrm{tr}(A)$

具体例 (1)

対称.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$(\lambda-5)(\lambda-2)-(-2)^2$
$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-6)$$

$= \lambda I_2 - A.$

なので A の固有ベクトルは $\lambda = 1, 6$

$\lambda = 1$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

$\Leftrightarrow y = -2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$

なので固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ?$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ($x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ とする)

$A\vec{r}_1 = \vec{r}_1$

具体例 (2)

$\lambda = 6$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

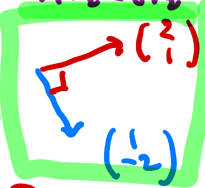
$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = 2y.$

なので固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

$\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $A\vec{r}_2 = 6\vec{r}_2$



ここで

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$L = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$ 回転

とすると R は回転行列で

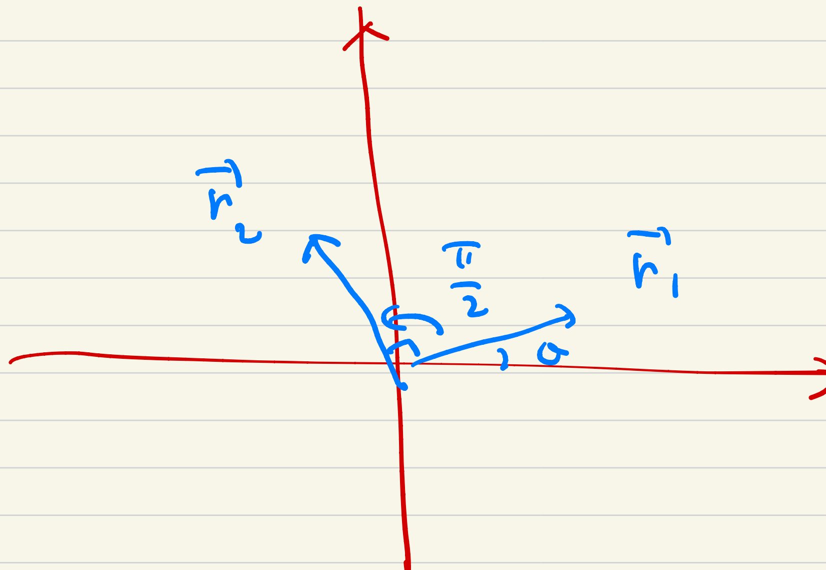
R は正則!!

$$AR \stackrel{\downarrow}{=} (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2) = (\vec{r}_1\ 6\vec{r}_2) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

から $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ と回転行列 R を用いて対角化できます.

R^{-1}.

→ 2次形式のため.



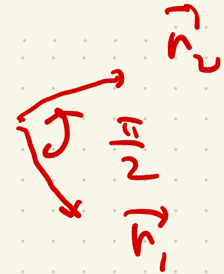
$$R = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

回転.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = (\vec{n}_1 \ \vec{n}_2)$$

← 計算してみる.



$$R^{-1} A R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$5x^2 + 4xy + 2y^2$$

$$= \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(R^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(R^{-1} A R \cdot R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right)$$

$$= \xi^2 + 6\eta^2$$

Q 回転

$$(Q\vec{v}, Q\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$

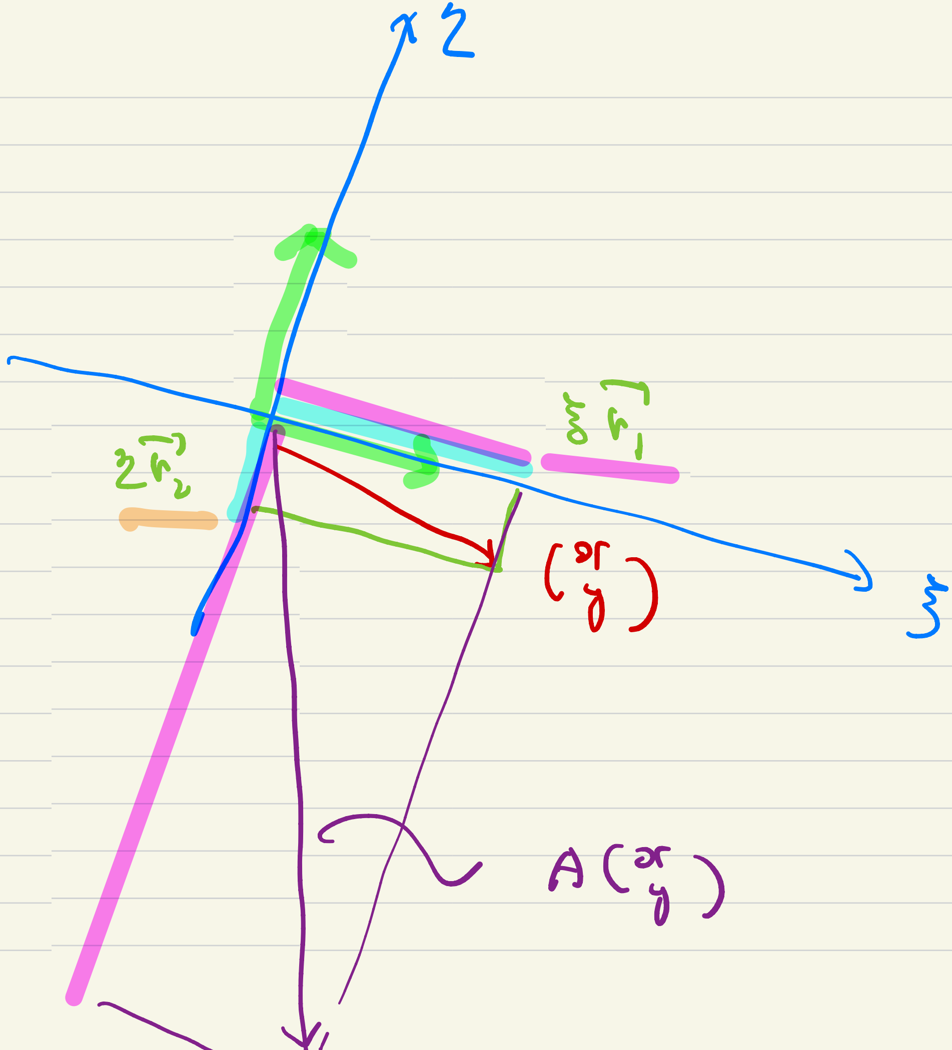
$$R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2$$

$$R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 6\eta \end{pmatrix}$$



$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ 転置行列の重要な性質.

- **定理**　$B \in M_2(\mathbf{R})$ とする。このとき $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(B\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tB\vec{y})$$

$\underset{\mathbb{R}^2}{\cap}$ $\underset{\mathbb{R}^2}{\cap}$

$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

- （証明）

${}^tB = \begin{pmatrix} {}^t\vec{e}_1 \\ {}^t\vec{e}_2 \end{pmatrix}$ $\underset{M_2(\mathbb{R})}{\cap}$ 2

$$\begin{aligned}(B\vec{x}, \vec{y}) &= (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2, \vec{y}) = x_1(\vec{b}_1, \vec{y}) + x_2(\vec{b}_2, \vec{y}) \\ &= x_1\,{}^t\vec{b}_1\vec{y} + x_2\,{}^t\vec{b}_2\vec{y} = \left(\vec{x}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1\vec{y} \\ {}^t\vec{b}_2\vec{y} \end{pmatrix}\right) = (\vec{x}, {}^tB\vec{y})\end{aligned}$$

$B\vec{x} =$

$\begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1\vec{y} \\ {}^t\vec{b}_2\vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{e}_1 \\ {}^t\vec{e}_2 \end{pmatrix}\vec{y}$ $\quad {}^tB\vec{y}\ \|$

$$(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \\ &(\vec{a}, \vec{b}) = {}^t\vec{a}\,\vec{b} \\ &= (a_1 \ a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right).$$

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{array}{r} \\ i \to \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \vdots \\ x a_i + y b_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$x \vec{a} + y \vec{b}$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots \\ \begin{pmatrix} a_i & b_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\alpha \neq \beta$ のときの固有ベクトル

A : 2×2 対称行列. $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in \mathbb{R}^2$

- **定理** $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$、$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ ならば $\quad \alpha \neq \beta.$

$A\vec{a} = \alpha\cdot\vec{a}$

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

- （証明）${}^tA = A$ だから $(A\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_1, A\vec{p}_2)$ $\quad = (\vec{p}_1, {}^tA\vec{p}_2)$

$$(A\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \quad (1)$$

$$(\vec{p}_1, A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1, \beta\vec{p}_2) = \beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \to (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

$$\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\neq 0}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

実対称行列は回転行列で対角化可能

$A\vec{q}_1 = \alpha\vec{q}_1$

$A\vec{q}_2 = \beta\vec{q}_2$

$A(-\vec{q}_2) = \beta(-\vec{q}_2)$

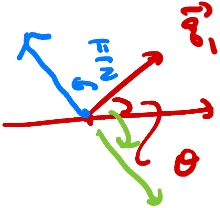
- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$、$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$、$\vec{p}_i \neq \vec{0} (i = 1, 2)$ とする。

$\vec{p}_1 \perp \vec{p}_2$

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{||\vec{p}_1||}\vec{p}_1, \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{||\vec{p}_2||}\vec{p}_2$$

とすると

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0, \; ||\vec{q}_1|| = ||\vec{q}_2|| = 1$$



- $\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$(\vec{q}_1, \vec{q}_2)$ 回転

$(\vec{q}_1, -\vec{q}_2)$ は回転

実対称行列は回転行列で対角化可能 (No.2)

$R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$

- $(\vec{q}_1\ \vec{q}_2)$ または $(\vec{q}_1\ \ -\vec{q}_2)$ は回転行列である。
- **定理**　2 次対称行列 A は回転行列で対角化可能である。すなわち、回転行列 R が存在して

$$AR = R\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$AR = (A\vec{r}_1\ \ A\vec{r}_2) = (\alpha\vec{r}_1\ \ \beta\vec{r}_1)$

$= (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

具体例 (3)

Rの定義 $(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ は回転行列 $R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

と対角化可能であったので,

R^{-1} の定義

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(R^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\boxed{R^{-1}AR} \cdot R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$= I_2$

$5x^2 + 4xy + 2y^2$

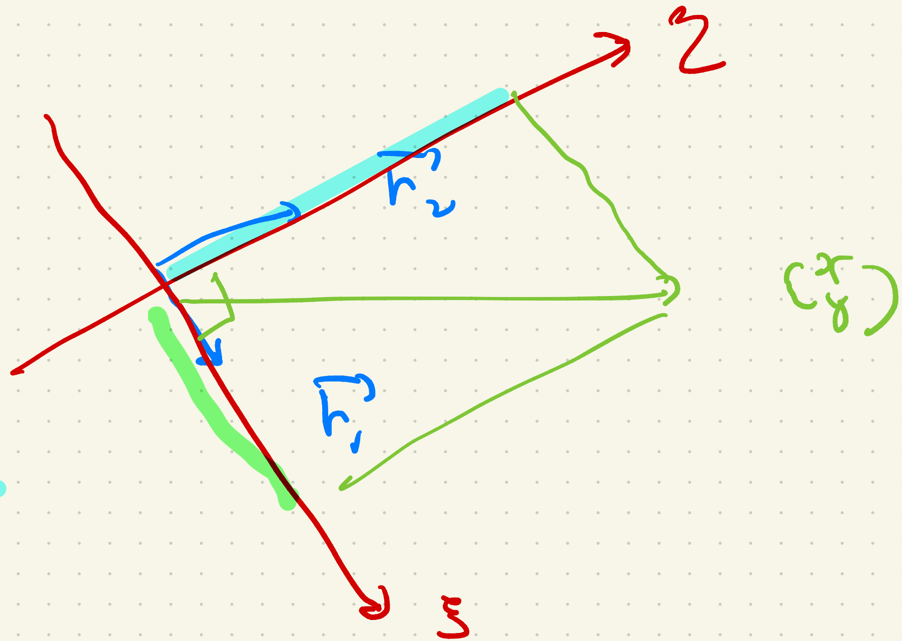
$$= \left(\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \xi^2 + 6\eta^2$$

ここで回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ を用いました.

$R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{r}_1 + \eta\vec{r}_2$

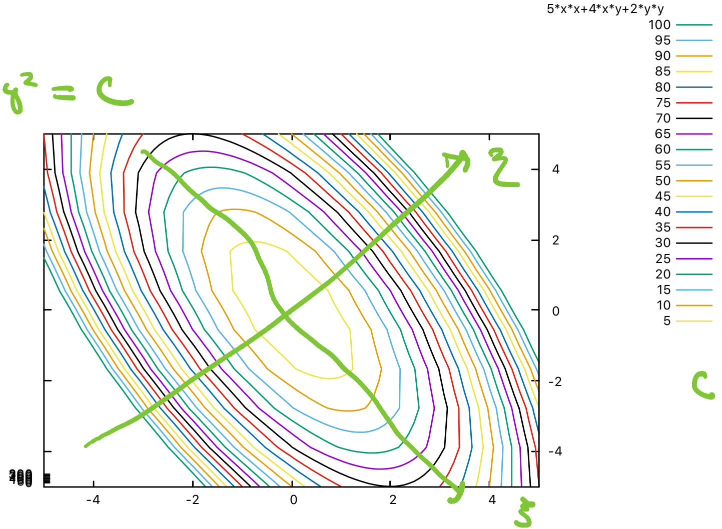
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{h}_1 + z \vec{h}_2$$



具体例 (4)—等高線 plot

$5x^2 + 4xy + 2y^2 = c$

等高線



2 次形式の標準形

実対称行列.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$

R 回転

$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

- R^{-1} が回転行列で、内積を保つから

R 回転 なら.

$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$

$$\begin{aligned}
\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(R^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(R^{-1}AR \cdot R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $R \cdot R^{-1} = I_2$, $R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

- 回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2 = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

-

$$\begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \alpha \xi^2 + \beta \eta^2 \end{aligned}$$

2次形式の正定値性 No.1

$(A\vec{v},\vec{v}) = 0$

- 2次形式の正定値性（負定値性）

$\Leftrightarrow a>0,\ |A| = ab - c^2 > 0$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$　定義

$$(A\vec{v},\vec{v}) > 0\ (\vec{v}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \alpha,\beta > 0$$

$$(A\vec{v},\vec{v}) < 0\ (\vec{v}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \alpha,\beta < 0$$

R 回転.

$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

- 正定値性について (⇒) $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$ のとき

— 仮定

$$0 < (A\vec{r}_1,\vec{r}_1) = (\alpha\vec{r}_1,\vec{r}_1) = \alpha\cdot||\vec{r}_1||^2 = \alpha \boxed{> 0}$$

$$0 < (A\vec{r}_2,\vec{r}_2) = (\beta\vec{r}_2,\vec{r}_2) = \beta\cdot||\vec{r}_2||^2 = \beta \boxed{> 0}$$

$\Downarrow$

$AR = R\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$(A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2) = (\alpha\vec{r}_1\ \beta\vec{r}_2)$

回転 $\Leftrightarrow$ $||\vec{r}_1|| = ||\vec{r}_2|| = 1$, $(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = 0$　直交行列.

2 次形式の正定値性 (No.2)

$\alpha, \beta > 0$ と仮定.

- 正定値性について（$\Leftarrow$） $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に注意。

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \underset{>0}{\alpha}\,\underset{\geq 0}{\xi^2} + \underset{>0}{\beta}\,\underset{\geq 0}{\eta^2} \geq 0$$

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

さらに

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = 0 \;\to\; \alpha\xi^2 = \beta\eta^2 = 0$$
$$\to\; \xi = \eta = 0 \to x = y = 0$$

$\alpha, \beta > 0$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

- **N.B.** $A, B \geq 0$ のとき

$$A + B = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$$

2 次形式の正定値性 (No.3)

- 正定値性を A の係数で判定する

$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$

$\Updownarrow$

$$\alpha,\ \beta > 0 \Leftrightarrow a > 0,\ \det(A) = ab - c^2 > 0$$

$$\alpha,\ \beta < 0 \Leftrightarrow a < 0,\ \det(A) = ab - c^2 > 0$$

- （注意） $a + b = \alpha + \beta$ と $\alpha\beta = ab - c^2$

$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + |A|$
$= \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta$

- （注意） $\alpha, \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$
- （正定値性） $\boxed{(\Rightarrow)}$

各自考える.

$ab \geq ab - c^2 = \alpha\beta > 0$

$\alpha, \beta > 0$ ⇒ 仮定

$$ab - c^2 = \alpha\beta > 0 \quad \rightarrow \quad ab > 0$$

$$a + b = \alpha + \beta > 0 \quad \rightarrow \quad a + b > 0 \rightarrow a, b > 0$$

2 次形式の正定値性 (No.4)

- （正定値性）($\Leftarrow$)　$a>0$, $ab-c^2>0$ を仮定.

$$ab \geq ab - c^2 > 0 \quad \to \quad ab > 0$$
$$a > 0,\ ab > 0 \quad \to \quad b > 0$$
$$\left\{\begin{array}{l}\alpha + \beta = a + b > 0 \\ \alpha\beta = ab - c^2 > 0\end{array}\right. \quad \to \quad \alpha, \beta > 0$$

- **注意**　$\det(A) = ab - c^2 < 0$ のとき $\alpha\beta < 0$

($\alpha > 0$ かつ $\beta < 0$) or ($\alpha < 0$ かつ $\beta > 0$)　異符号をみとめる.