鞍点

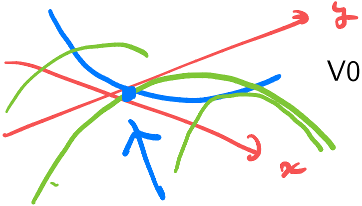
$z = x^2 - y^2$

$z_x = z_y = 0 \iff x = y = 0$

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V01 Nov ~~04~~ 11, 2020 for CalcNT



鞍点 saddle pt.

実２次対称行列 A が $|A| < 0$ を満たす場合 (1)

$H(f)(P_0)$　P_0 は停留点

$\exists P$ 回転

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$|P^{-1}AP| = \alpha\beta$$

$$\shortparallel$$

$$|A|$$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が条件

$$|A| = ab - c^2 < 0$$

を満たす場合，A の固有値 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ は

$$\alpha\beta = |A| < 0$$

から

$$(\alpha > 0, \beta < 0) \quad \text{OR} \quad (\alpha < 0, \beta > 0)$$

となります．以下では

$$\alpha > 0, \beta < 0$$

の場合を考えます．

実 2 次対称行列 A が $|A| < 0$ を満たす場合 (2)

このとき　$\alpha > 0,\ \beta < 0$

$$\alpha = \omega_1^2,\ \beta = -\omega_2^2,\ \underline{\omega_1, \omega_2 > 0}$$

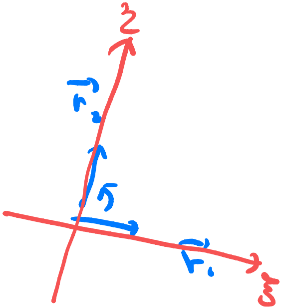
と表現できます．一般論から回転行列 $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$ が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき A が定める 2 次形式は回転座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

によって



$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\iff \eta = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2}\xi$$

$$\begin{aligned} \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \\ &= \omega_1^2\xi^2 - \omega_2^2\eta^2 \end{aligned}$$

と表されます．

実 2 次対称行列 A が $|A| < 0$ を満たす場合 (3)

$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) > 0$

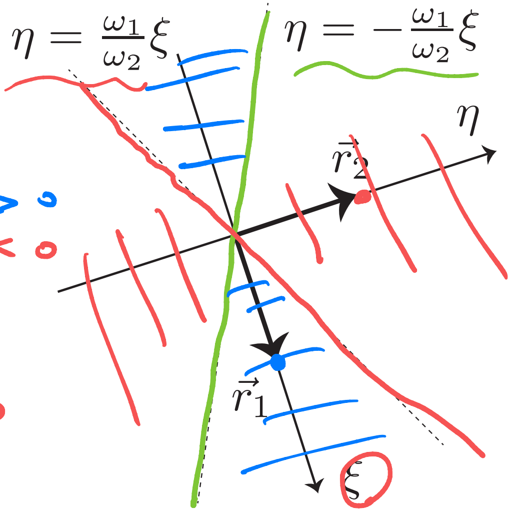
< 0

$\omega_1^2 \xi^2 - \omega_2^2 \eta^2 > 0$

< 0

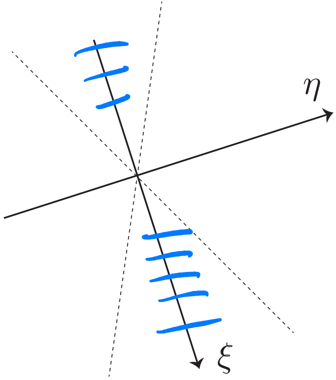
$\xi = 0,\ \eta = 1$

$-\omega_1^2 < 0$



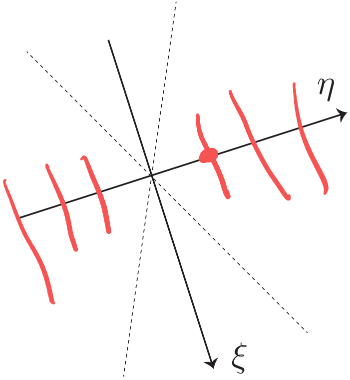
実 2 次対称行列 A が $|A| < 0$ を満たす場合 (4)

$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0$



$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) < 0$



$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

具体例 (1)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3)$$

なので A の固有ベクトルは $\lambda = -2, 3$

<u>$\lambda = -2$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

具体例 (2)

$\lambda = 3$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

ここで

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

← 回転行列

とすると R は回転行列で

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ 6\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と回転行列 R を用いて対角化できます.

具体例 (3)

$= \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2$

ここで回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ を用いると，A が定める 2 次形式は

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(R^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(R^{-1}AR \cdot \overbrace{R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{= \binom{\xi}{\eta}}, \underbrace{R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{= \binom{\xi}{\eta}}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = -2\xi^2 + 3\eta^2$$

R^{-1} 回転

内積を保つ

$(\ , \ ) > 0$

< 0

$= 0$ → 各自描く.

R 回転

$(R\vec{v}, R\vec{w})$

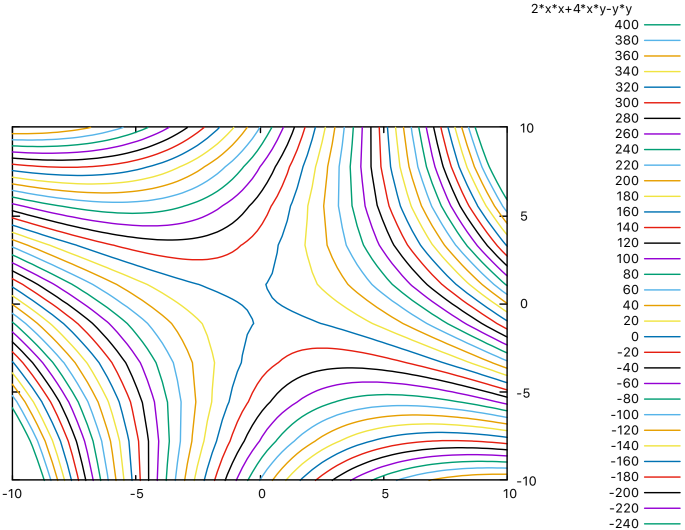
$=$

$(\vec{v}, \vec{w})$

具体例 (4)—等高線 plot

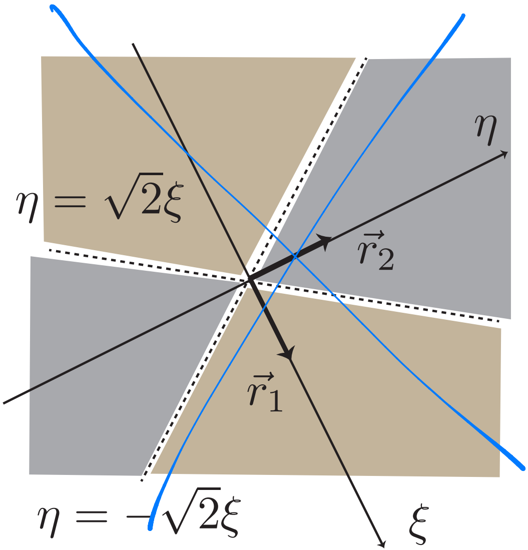
$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

$$= -2\xi^2 + 3\eta^2$$



具体例 (5)

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$
$$= -2\xi^2+3\eta^2$$
$$= 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\eta = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,\xi$$
$$= \pm\frac{\sqrt{6}}{3}\,\xi$$

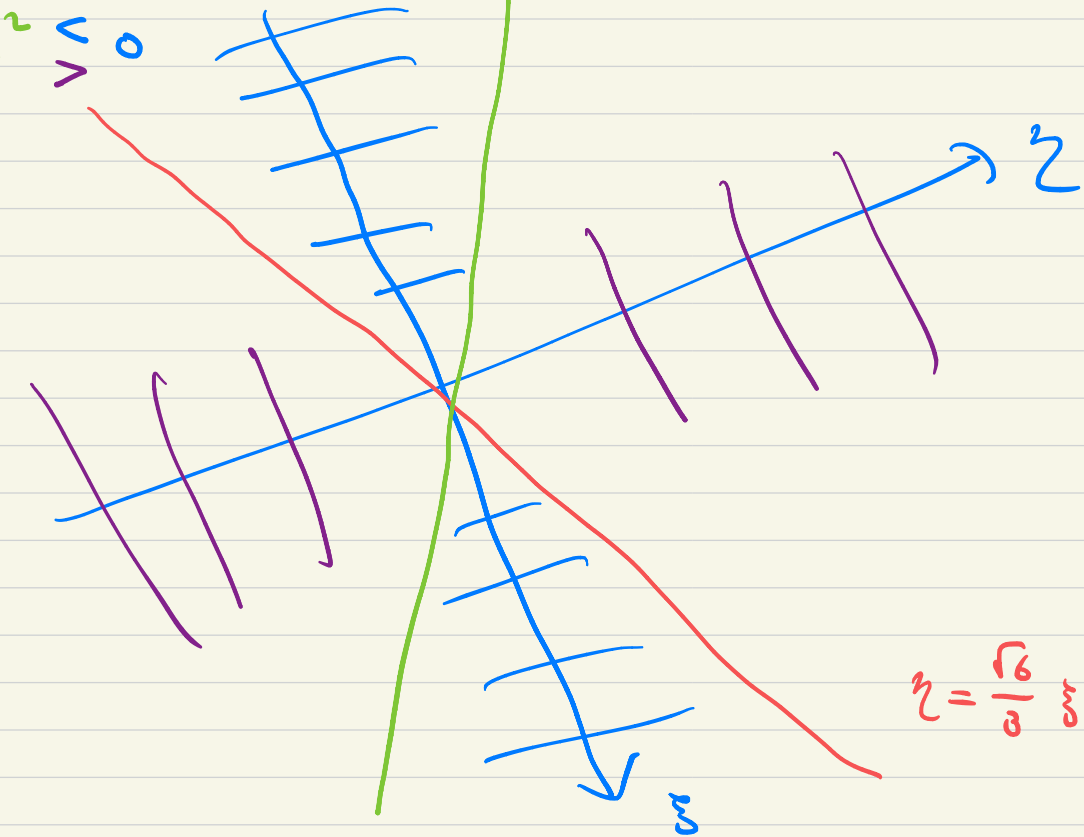


$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$
$$\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

$$= -2\xi^2 + 3\eta^2 \lessgtr 0$$

$\eta = -\frac{\sqrt{6}}{3}\xi$



$\eta = \frac{\sqrt{6}}{3}\xi$

Hesse 行列式が負の停留点 (1)

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U とその上の C^2 級関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

があるとします． f の停留点 $\mathrm{P}_0(a,b) \in U$:

$$f_x(\mathrm{P}_0) = f_y(\mathrm{P}_0) = 0$$

について

定理

$\det(H(f)(\mathrm{P}_0)) < 0$ ならば P_0 で f は極大でも極小でもありません．

Hesse 行列式が負の停留点 (2)—証明

Hesse 行列 $H := H(f)(\mathrm{P}_0)$ の固有値を $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ とすると

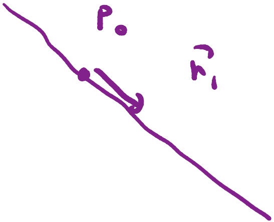
$\det(H) < 0$

$$\alpha\beta < 0$$

となります．ここでは$\underline{\alpha > 0, \beta < 0}$ の場合を考えます．回転行列 $R := (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$ が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき

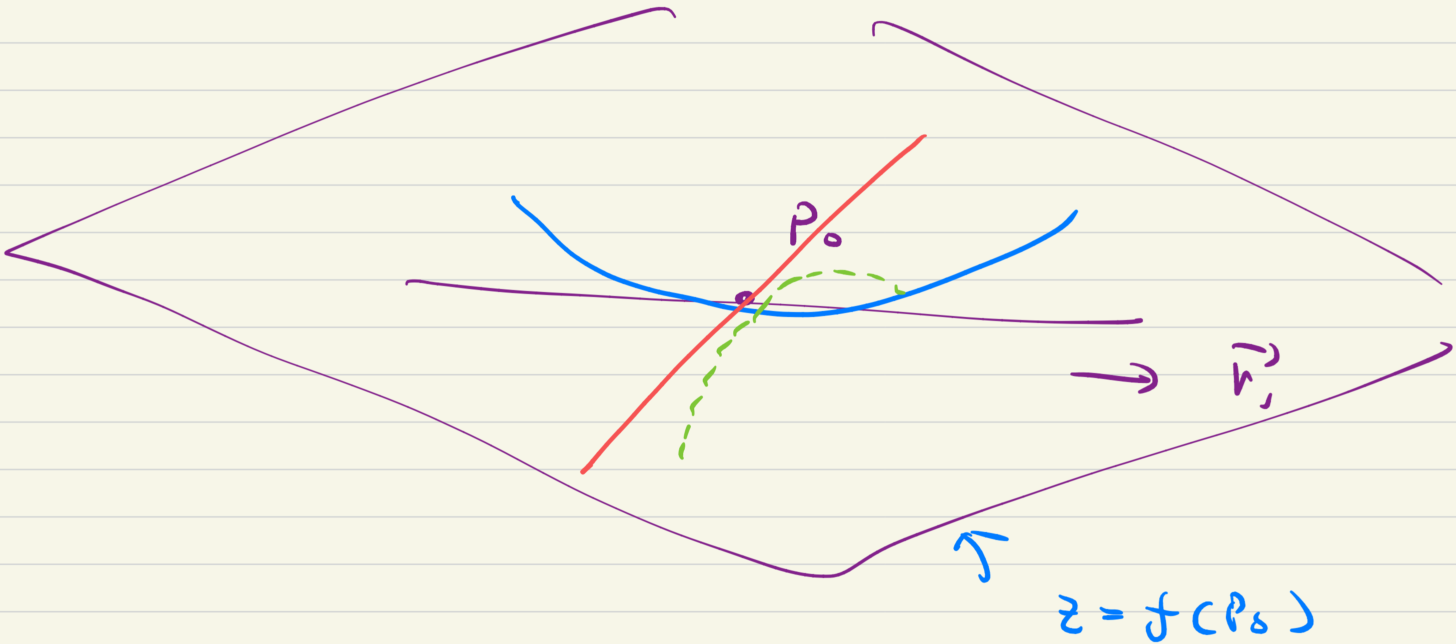


$$F(t) := f(\mathrm{P}_0 + t\vec{r}_1)$$

とすると

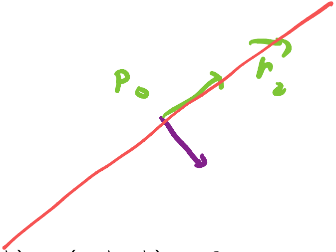
$$F'(0) = (\overbrace{\nabla(f)(\mathrm{P}_0)}^{=\vec{0}}, \vec{r}_1) = 0, \quad F''(0) = (H(f)(\mathrm{P}_0)\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\alpha\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha > 0$$

$\leftarrow \|\vec{r}_1\|^2 = 1$



P_0
$\vec{r}$
$z = f(P_0)$

Hesse 行列式が負の停留点 (3)—証明



他方

$$G(t) := f(\mathrm{P}_0 + t\vec{r}_2)$$

とすると

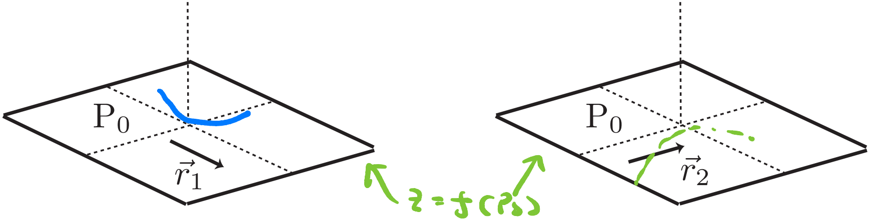
$$G'(0) = (\nabla(f)(\mathrm{P}_0), \vec{r}_2) = 0, \quad G''(0) = (H(f)(\mathrm{P}_0)\vec{r}_2, \vec{r}_2) = (\alpha\vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta < 0$$

$= 0$

β

$\|\vec{r}_2\| = 1$

Hesse 行列式が負の停留点 (4)—証明



P_0 では極大でも極小でもない