連鎖律.

Chain Rule –その直観的な理解

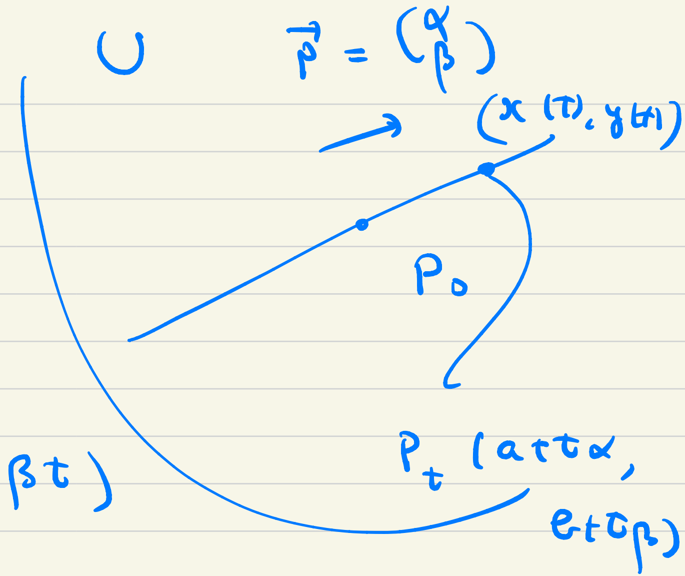
戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

Nov, 2017
V02 Nov. 11, 2020 for CalcNT

方向微分 $P_0(a,b) \in U$

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$



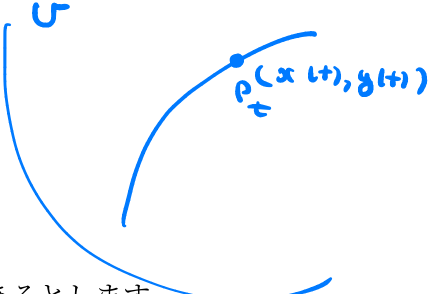
$$F(t) = f(P_t) = f(a+\alpha t, b+\beta t)$$

$$\longrightarrow \quad F'(t) = \alpha f_x(P_t) + \beta f_y(P_t)$$

$$= \left(\nabla(f)(P_t), \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right)$$

$$F''(t) = \left(H(f)(P_t)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right)$$

Chain Rule



- $\mathbf{R}^2$ の開集合 U と U 上の C^1 級関数

$$f: U \longrightarrow \mathbf{R}$$

が与えられているとします.

- U 中の微分可能な曲線

$$c:\ (A, B) \longrightarrow U \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$ があるとします.

- このとき 1 変数の関数 $F: (A, B) \to \mathbf{R}$ を

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

$$= f(P_t)$$

と定義できます.

定理

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

$$= \left(\nabla(f)(P_t), \underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{= c'(t)} \right)$$

c'

$\Downarrow$

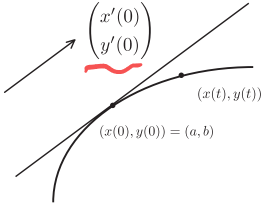
全微分可能.

解析入門

パラメータ表示された曲線の接線方向 (1)

上で与えた曲線の $\mathrm{P}_0(a, b) = (x(0), y(0))$ における接線方向は

$$c'(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}}$$



$= c(t)$

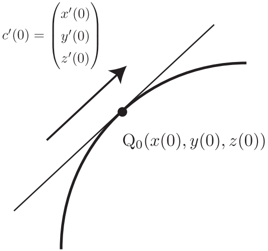
パラメータ表示された曲線の接線方向 (2)

3 次元空間中の曲線

$$c: \ (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

が与えられているとき c の $\mathrm{Q}_0(x(0), y(0), z(0))$ における接線方向は

$$c'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$



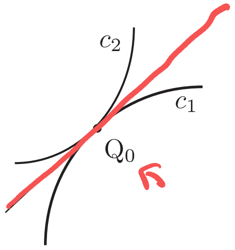
空間中の 2 曲線が接するとき

3 次元空間中の 2 曲線

$$c_1 : (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$$

$$c_2 : (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

が与えられていて点 $\mathrm{Q}_0(a, b, c)$ が共有されているとします．すなわち



接線が共有.

$t=t_1$ $t=t_2$

$$(a, b, c) = (x_1(t_1), y_1(t_1), z_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2), z_2(t_2))$$

がある $t_1, t_2 \in (A, B)$ に対して成立するとします．このとき

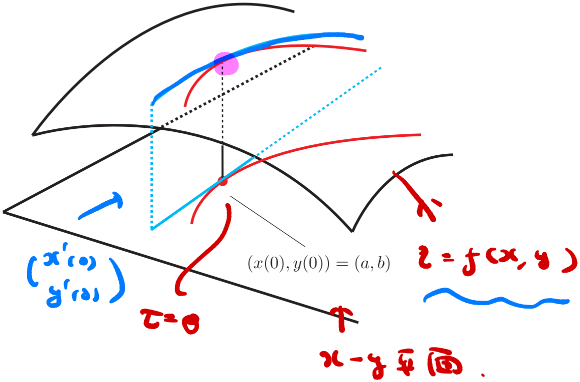
$$c_1 \text{ と } c_2 \text{ が } \mathrm{Q}_0 \text{ で接する} \Leftrightarrow C_1'(t_1) \parallel C_2'(t_2)$$

空間中の接する 2 曲線

空間中には曲線

$$(x(t), y(t), F(t))$$

があって，$x-y$ 平面の曲線 $(x(t), y(t))$ 上を動きます．
さらに別の曲線



$$(a + x'(0)t, b + y'(0)t, f(a + x'(0)t, b + y'(0)t))$$

が接線 $(a + x'(0)t, b + y'(0)t)$ の上を動きます．
2 曲線は $(a, b, f(a, b))$ で接します．

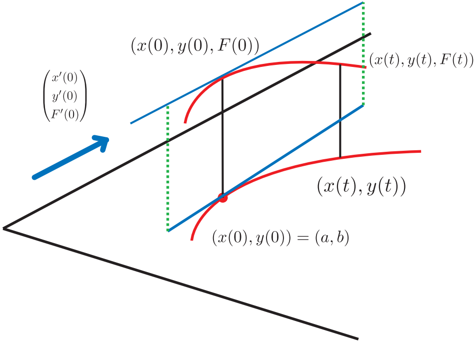
接線方向 (1)

曲線

$$(x(t), y(t), F(t))$$

の $(x(0), y(0), F(0))$ における接線方向は

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ F'(0) \end{pmatrix}$$



接線方向 (2)

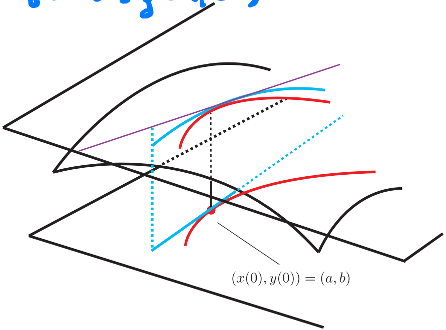
方向微分 $G'(0) = x'(0) f_x(a,b) + y'(0) f_y(a,b)$

$$G(t) = f(a + x'(0)t, b + y'(0)t)$$

とするとき，曲線

$$(a + x'(0)t, b + y'(0)t, G(t))$$

の $t = 0$ の $(a, b, f(a, b))$ における接線方向は



$$(x'(0), y'(0), f_x(a, b)x'(0) + f_y(a, b)y'(0))$$

これは方向微分にあたります.

Chain Rule

- $(x(t), y(t), F(t))$ の接線方向

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ F'(0) \end{pmatrix}$$

と別の曲線 $(a + x'(0)t, b + y'(0)t, G(t))$ の接線方向

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ f_x(a,b)x'(0) + f_y(a,b)y'(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

は平行です.

- 従って

$$F'(0) = f_x(a,b)x'(0) + f_y(a,b)y'(0)$$