同次関数

Nobuyuki TOSE

斉次関数

homogeneous fct.

V01 Oct 11, 2017
V03 Oct 16, 2019
V04 Nov 18, 2020 for CalcNT

$x, y > 0, \ t > 0$

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

1次同次

$t > 0$

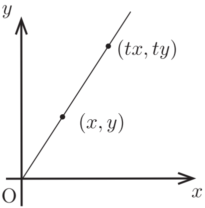
$\sqrt{t^2} = |t| = t$

$$f(tx, ty) = \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = \sqrt{t^2(x^2+y^2)} = t\sqrt{x^2+y^2} = t f(x,y)$$

同次関数–定義

$\mathbf{R}^2$ の第 1 象限

$$\mathbf{R}^2_{++} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x, y > 0\}$$



上で定義された関数

$$f:\ \mathbf{R}^2_{++} \to \ \mathbf{R}$$

が与えられているとします.

$$(x,y) \in \mathbf{R}^2_{++},\ t > 0 \quad \Rightarrow (tx, ty) \in \mathbf{R}^2_{++}$$

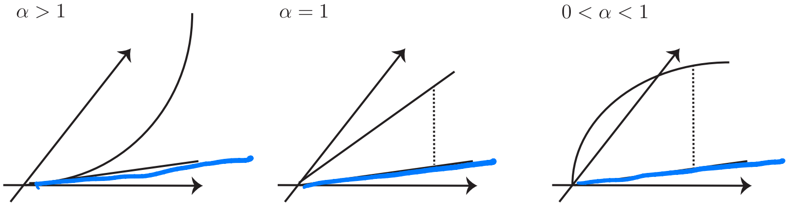
← 錐 cone.

に注意しましょう． f が α 次の**同次関数（斉次関数）**であるとは

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}, t > 0)$$

が成立するときです.

同次関数 (2)



例 Cobb-Douglas 型関数

$$f(x,y) = Ax^{\alpha}y^{\beta} \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

を Cobb-Douglas 型関数と呼ぶ．生産関数，効用関数のモデルに用いることが多い．

$$(tx)^{\alpha}(ty)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}x^{\alpha}y^{\beta}$$

から Cobb-Douglas 型関数は $\alpha+\beta$ 次同次関数である．

$$\boxed{f(tx, ty) = t^{\alpha+\beta} f(x,y)}$$

Euler の等式

定理

$f: \mathbf{R}^2_{++} \to \mathbf{R}$ が α 次同次関数とする．このとき　C¹級．

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \alpha f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

が成立する．

Euler の等式．

$$f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

の両辺を t で微分すると

$$xf_x(tx,ty) + yf_y(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$$

Chain Rule.

となる．ここで $t=1$ とすると

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \alpha f(x,y)$$

となる．

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t)$$

$$+ f_y(x(t), y(t))\, y'(t)$$

$x(t) = tx,\ y(t) = ty$ 　　 $x, y > 0$ は固定

$x'(t) = x,\ y'(t) = y.$

Euler の等式 (2)

定理

$f:\ \mathbf{R}^2_{++} \to \mathbf{R}$ が

C^1 級　　$(fg)' = f'g + fg'$

(tx, ty)

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \alpha f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

$tx\, f_x(x,y) + ty\, f_y(tx,ty)$

を満たすならば，f は α 次同次関数となる．$\Leftrightarrow$ $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$

$\alpha f(tx,ty)$

$x, y > 0$ 固定 $\longrightarrow$ $t^{-\alpha} f(tx,ty) = C$　　$t > 0$.

$f(tx,ty) = C\,t^\alpha$　　($t = 1$ を代入

$\longrightarrow$ $f(x,y) = C$.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(t^{-\alpha} f(tx,ty)\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx,ty) + t^{-\alpha}\left(xf_x(tx,ty) + yf_y(tx,ty)\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx,ty) + t^{-\alpha} t^{-1}\left((tx)f_x(tx,ty) + (ty)f_y(tx,ty)\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx,ty) + t^{-\alpha-1} \cdot \alpha f(tx,ty) = 0
\end{aligned}$$

$= \alpha f(tx,ty)$

から従う．　$f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ が Euler の等式を満たすことを示せ.