Lagrangeの未定乗数法

戸瀬信之

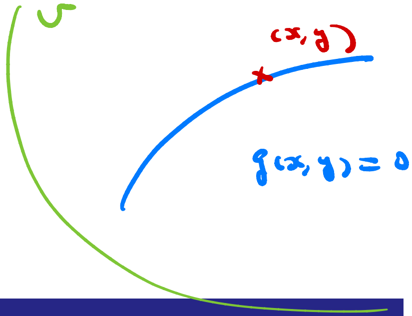
V01 Nov 29, 2017
V03 Nov. 18, 2020 for CalcNT

制約条件付き極値問題

U を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする．２関数

$$f, g : \ U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとき

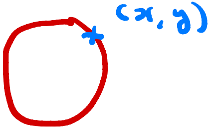


問題

$g(x, y) = 0$ の下で $z = f(x, y)$ を極大化（極小化）する

制約条件.

制約条件付き極値問題—例



例 1

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{の下で} \quad z = f(x,y) = 2x + y$$

例 2 $I, p, q > 0$ とする．予算制約

Income

	第1財	第2財
購入	x	y
価格	p	q

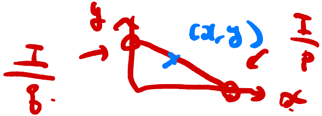
$$g(x,y) = I - px - qy = 0 \quad (x, y > 0)$$

の下で効用関数

$$u(x,y) = \sqrt{xy}$$

コブ・ダグラス型．

を最大化する．この問題は第 1 財，第 2 財の価格が p, q のときに，予算 I をすべて支出して第 1 財を x，第 2 財を y 購入して効用を最大化するという問題である．



陰関数定理

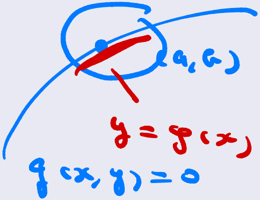
定理

$$g(a,b)=0, \quad g_y(a,b)\neq 0$$

ならば，(a,b) の近くで $\{(x,y)\in U;\ g(x,y)=0\}$ は

$$y=\varphi(x)$$

と表すことができる．



陰関数定理—例

単位円

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

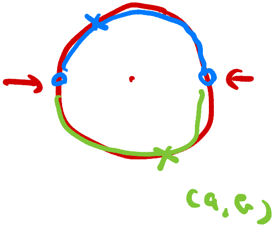
上の点 (a, b) において考える．

<u>$b > 0$ のとき</u>

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

<u>$b < 0$ のとき</u>

$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$

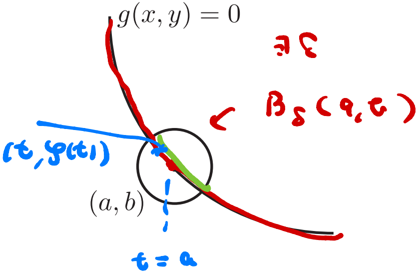


$g_y = 2y$

$g_y = 0$ の点

$(\pm 1, 0)$

解法



$$g(a,b)=0,\quad g_y(a,b)\neq 0$$

を仮定して，陰関数定理を適用する．(a,b) の近くで

$$y=\varphi(x)$$

と曲線 $g(x,y)=0$ を表す．

$\left.\begin{array}{l} g(x,y)=0 \\ B_\delta(a,b)\ni(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow g(a,b) \geq g(x,y)$ $\leq$

$$F(t)=f(t,\varphi(t))$$

(a,b) で極大（極小）ならば

とすると $F'(a)=0$ が従う．

解法 (2)

Chain Rule を使うと　　F(t) = f(t, φ(t)).

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

(t)'　　f(a) = b.

から　t=aを代

$$0 = F'(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b)\,\varphi'(a)$$

代入.

が分かります．さらに $g(t, \varphi(t)) \equiv 0$ の両辺を t で微分して

t ~ a

$$g_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$$

t ~ a.

から　t=aを代入.

$$g_x(a, b) + \underbrace{g_y(a, b)}_{\neq 0} \cdot \varphi'(a) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boxed{\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}}$$

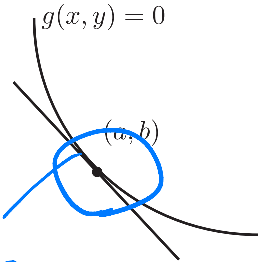
が分かります．

Chain Rule

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

$$\longrightarrow \quad F'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t)$$

$$+ f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t).$$



$y=\varphi(x)$

接線の傾きを考えると

(a,b) における曲線 $g(x,y)=0$ の接線は

$$g_x(a,b)(x-a)+g_y(a,b)(y-b)=0$$

であるが，$g_y(a,b)\neq 0$ から

接

$$y=\boxed{-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}}(x-a)+b$$

となる．

$$\boxed{\varphi'(a)=-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}}$$

解法 (3)

$f_x(a,b) + f_y(a,b)\cdot\varphi'(a) = 0$ に $\varphi'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$ を代入して

$-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$

$$f_x(a,b) - \frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\cdot f_y(a,b) = 0$$

$= \lambda$

CT

$\lambda := \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}$

を得ます．ここで Lagrange の未定乗数

$$\lambda := -\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}$$

接線条件.

を定めると

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} f_x(a,b) & + & \lambda g_x(a,b) & = & 0 \\ f_y(a,b) & + & \lambda g_y(a,b) & = & 0 \\ & & g(a,b) & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{(L)}$$

λ, a, b. 3変数.

が導けます．

定理

定理

$g(a,b)=0,\ g_y(a,b)\neq 0$ を満たす $(a,b)\in U$ において制約条件付き極値問題が極大値（極小値）をとるとします．このとき (L) を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．

例

$g_x = 2x,\ g_y = 2y$

$f_x = 2,\ f_y = 1$

接線条件

問題 $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で $z = f(x,y) = 2x + y$

(x,y) で極大（極小）とすると

$$\begin{cases} 2 + \lambda\, 2x = 0 & (i) \\ 1 + \lambda\, 2y = 0 & (ii) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．$\lambda = 0$ とすると (i) が $2 = 0$ となりますから，$\lambda \neq 0$ です．(i),(ii) から

$$x = -\frac{1}{\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda} \qquad \text{(iv)}$$

となりますが，これを (iii) に代入すると

例

$$1 = \frac{1}{\lambda^2}\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{5}{4} \to \lambda^2 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \quad から \quad \underset{\sim\sim\sim\sim}{\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

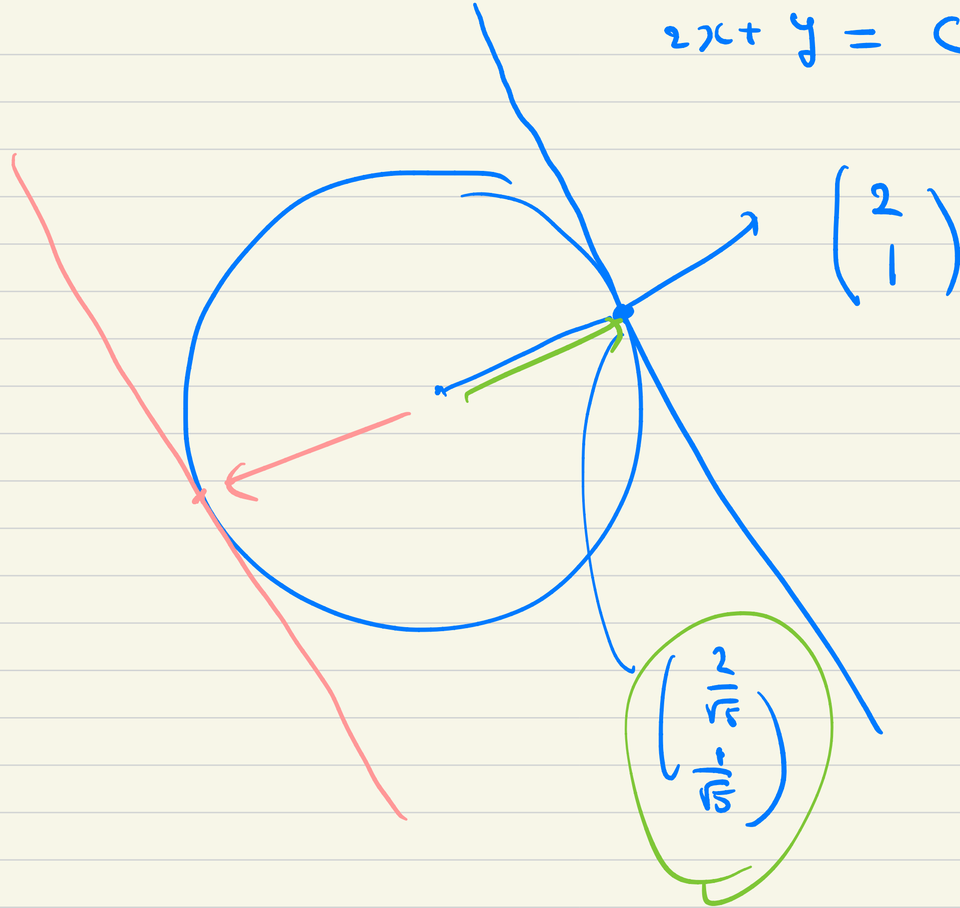
となります．(iv) に代入して

$$x = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \quad （複号同順）$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda}$$

$\boxed{\text{ミクロの[illegible]は2回}}$

$2x + y = c$


$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$